Topgun$_{\mathbf{x}}$ Physics

#1 Classical Mechanics Mastery

「力学」マスター
第一章 ～位置と時間～

Ryosuke ISHII

はじめに　～物理学俯瞰～

古典物理学

- 力学
- 電磁気学
- 熱力学

まず、ここをやるよ

人間の五感で捉えられる世界の物理学

現代物理学

- 量子論
- 相対論

五感を超えた世界の物理学
(光速に近い・素粒子や原子レベルに小さい)

この「力学マスター」では

物理学における「道具」と「その扱い方」

を、簡単なところから、
一歩づつ、積み上げていきます。

~~公式丸暗記数学~~　~~記憶力勝負物理学~~

▼

意味がわかる数学 ・ 理解できる物理学

学習というものは、螺旋状に繋がります。

だから、まずは読み通してみてください。
そうして復習してみてください。

第一章
位置と時間

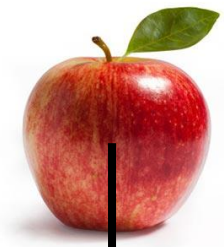
「物理は目の前の現象を説明するためのもの」

ですから、説明するために、
いま知りたい「本質」でないものを除外して
できるだけシンプルに考えます。

シンプルに考えます。

力学で、積極的に無視すること
- 色
- 味
- 値段

レベルが上がってから考えること
- かたち
- 回転
- 温度
- 圧力
- 空気抵抗



力学で考える事

まずここだけ！

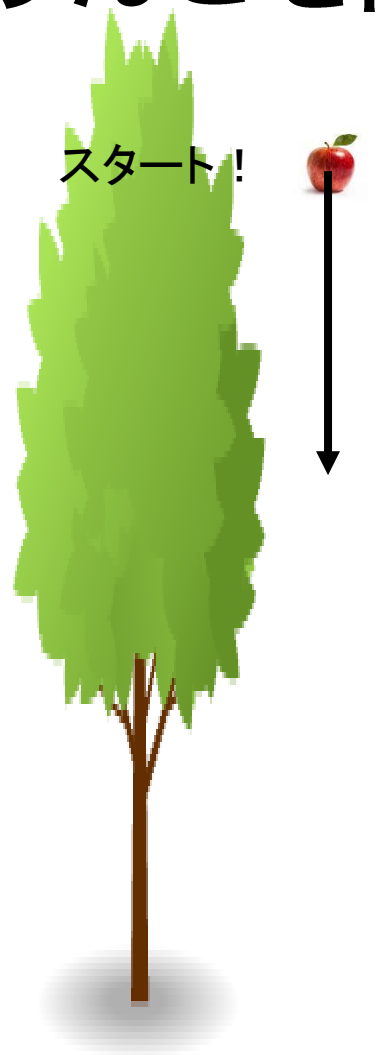
レベル1：
- 位置(どこにあるん？)
- 時間(秒速で来た？？)

レベル2：
- 運動の法則
- 力（重力、抗力、摩擦力）
- エネルギー、仕事
- 運動量、力積

『今起こっていることを説明する』
ためには、

まず『今起こっていること』を測る
「ものさし」が必要です。

ものさし①：位置と時間
りんごを高いところから 落としてみましょう



ものさし①：位置と時間
りんごを高いところから 落としてみましょう

スタート！ 

1秒後 

ものさし①：位置と時間
りんごを高いところから 落としてみましょう

スタート！ 

1秒後 

2秒後 

自然を記録しよう

スタート！ 

1秒後 

りんごを落とした時、時間が経つと位置が変わった！！
これは、自然を観測すると分かることです。

いまここに何か新しい「法則」があるのではなく、

2秒後 

ただ、出来事として起きたことの
「記録」がこれです。

3秒後 

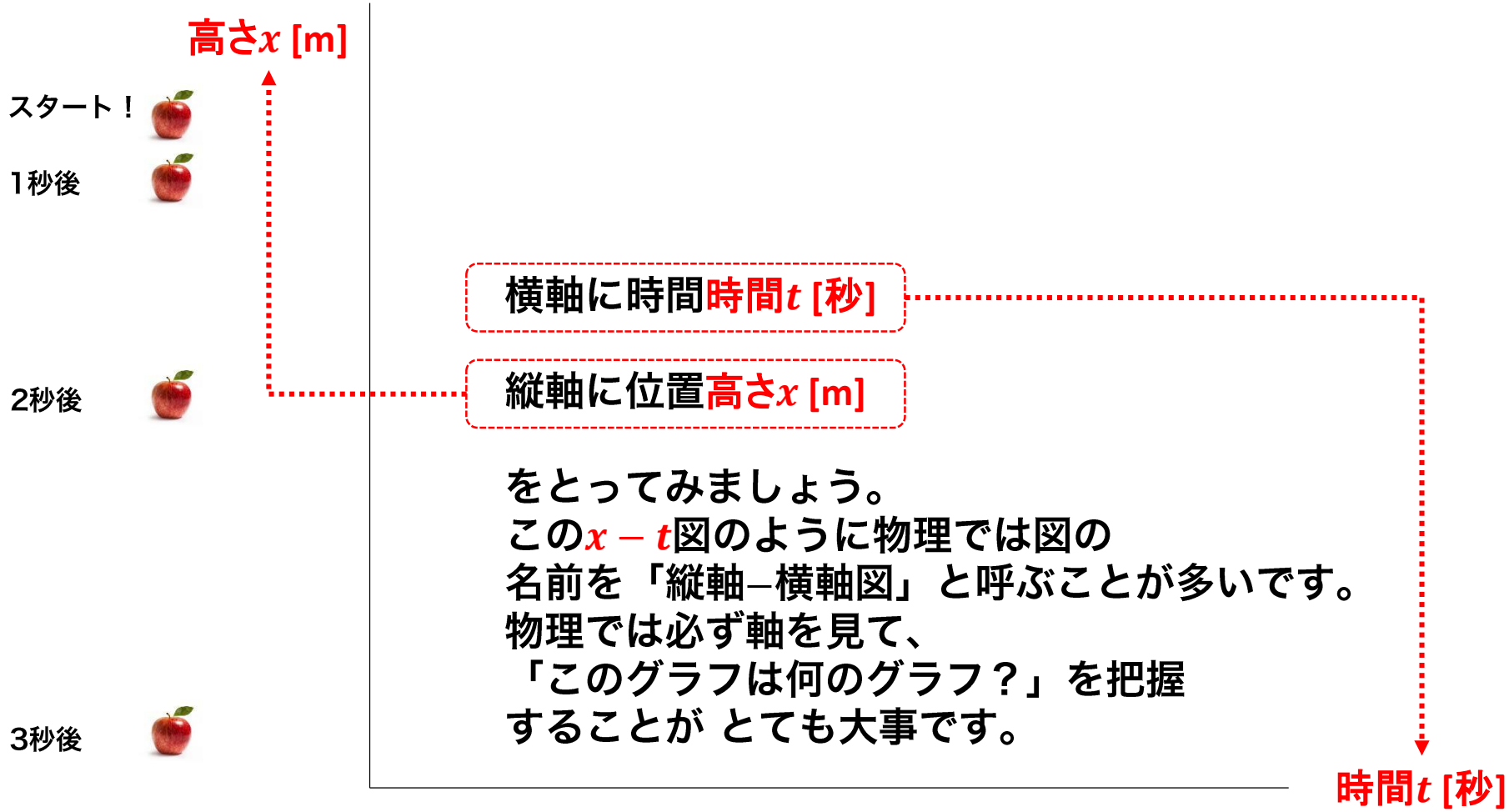
どうしたら、
上手に自然を記録できるでしょうか？

どうしたら、上手に自然を記録できるでしょうか？

上手に記録できたら、分析して、何かがわかるかもしれません。
りんごは落としたら、落ちてしまって記録に残らないので、わかりやすく記録したい！

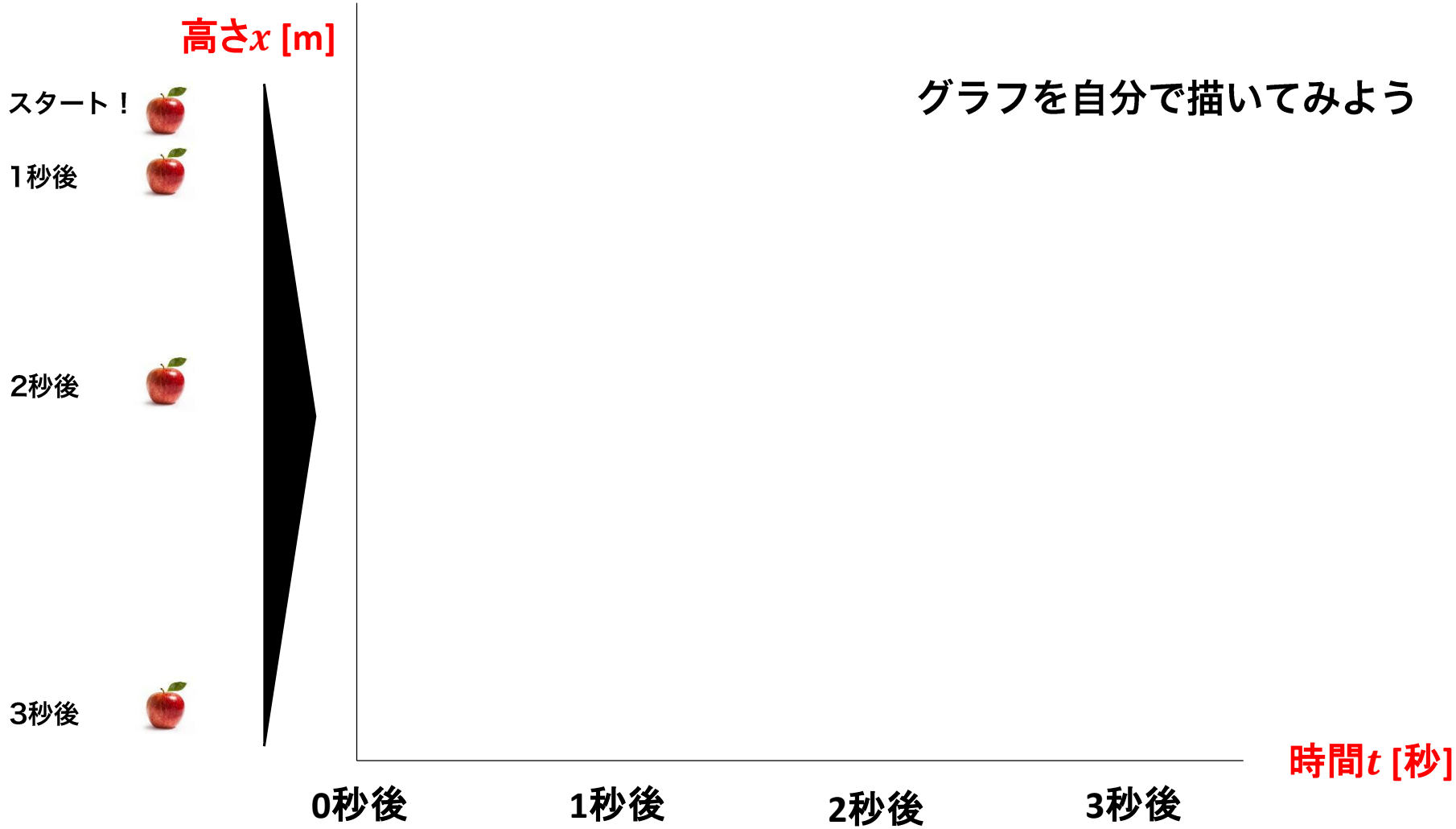
縦軸に位置、横軸に時間を取ったグラフを「$x-t$図」(エックスティー図)と言い、これを書くと「記録しやすい」

物理学者の発見：
$x-t$図で自然を上手に記録できる！

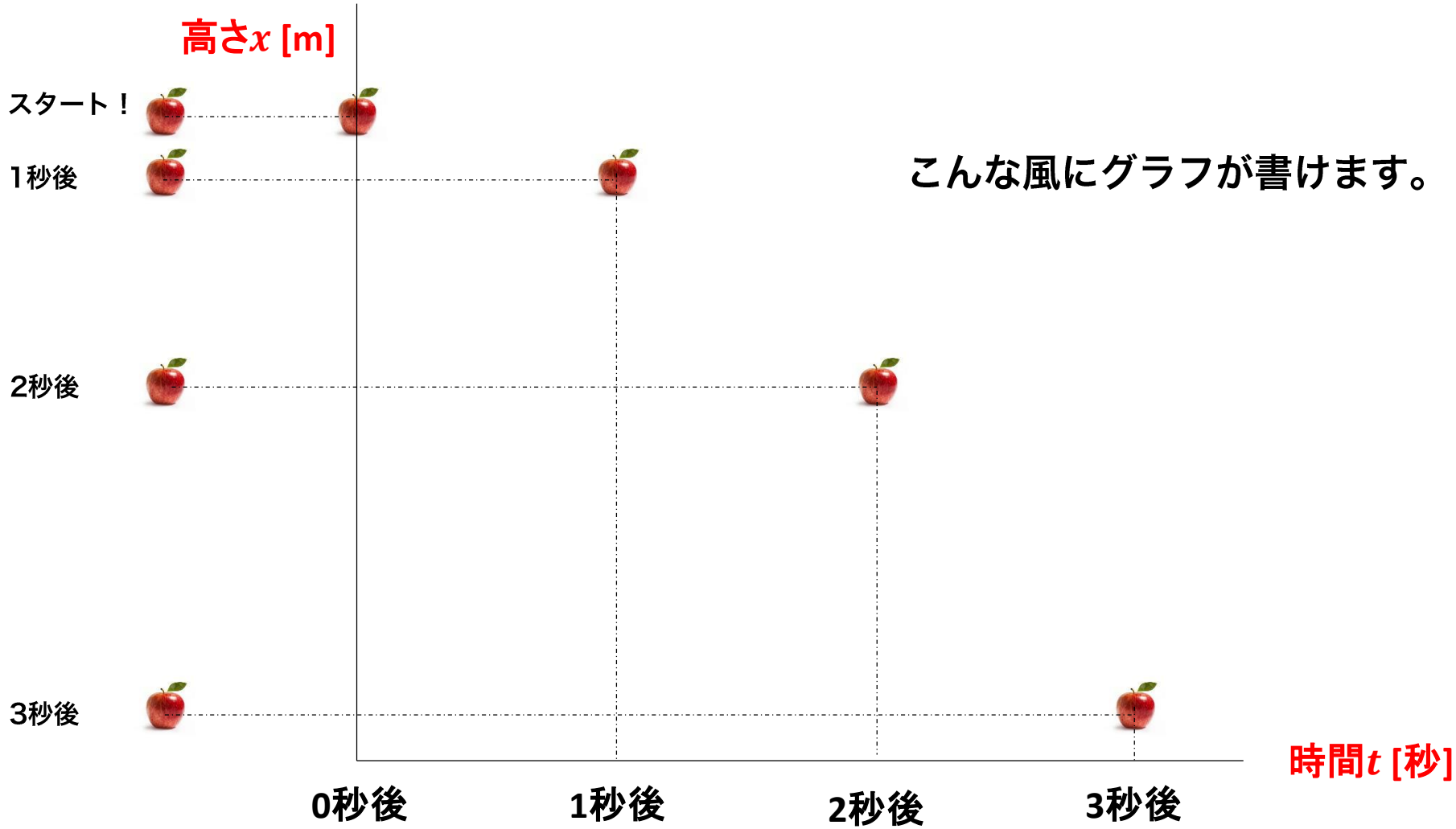


をとってみましょう。
この$x-t$図のように物理では図の
名前を「縦軸–横軸図」と呼ぶことが多いです。
物理では必ず軸を見て、
「このグラフは何のグラフ？」を把握
することが とても大事です。

$x-t$図を描いてみよう



時間が経つと、位置はどうなった？



こんな風にグラフが書けます。

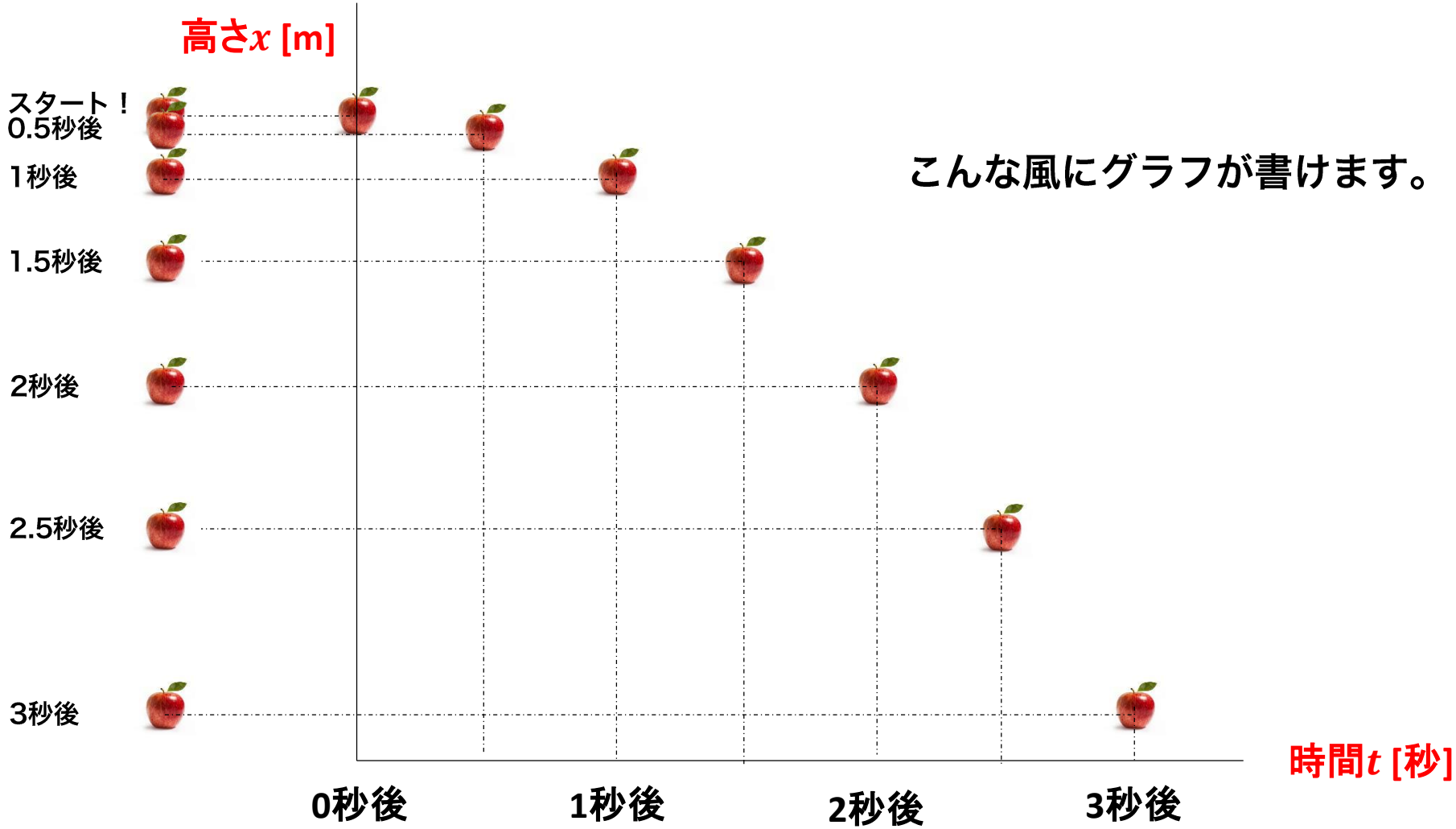
ものさし①：位置と時間
りんごを高いところから 落としてみましょう

スタート！
0.5秒後
1秒後
1.5秒後
2秒後
2.5秒後
3秒後

もっと細かく観察すると
もっと色々わかるかもしれません。

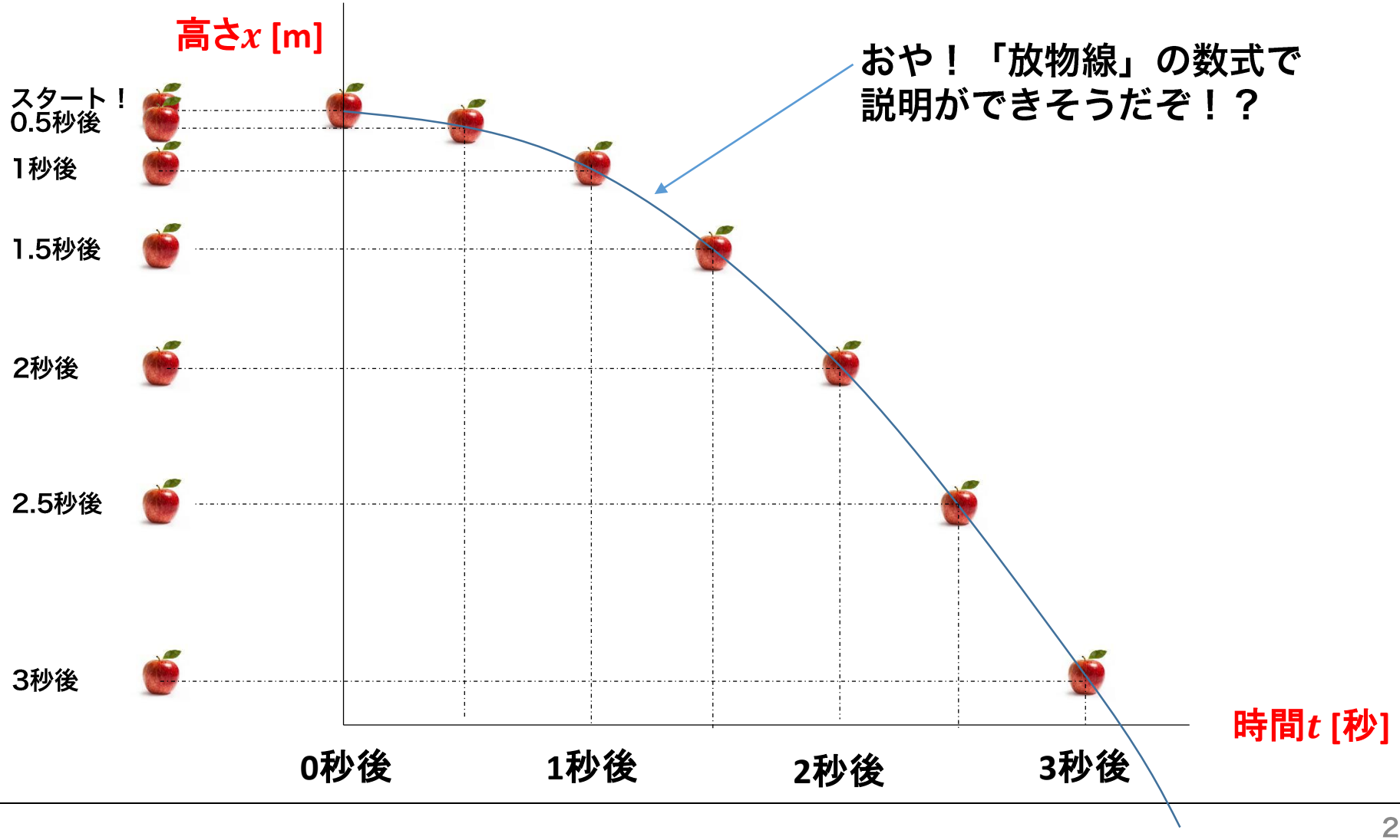
0.5秒ごとに位置を測ってみました。

ものさし①：位置と時間
りんごを高いところから 落としてみましょう



こんな風にグラフが書けます。

ものさし①：位置と時間
りんごを高いところから 落としてみましょう



余談①

「数式」は見た目ほど
難しくない！
実は、ラクをするためにある！！

数式をできるだけ避けたい皆さんへ

もしかすると、みなさんは信じられないかもしれませんが、

実は数式は難しくありません。
むしろ、ラクをするため♥のものです。

みなさんは、慣れていないだけです。

ラクスル数式

たとえば、
「３たす４たす５かける２は結果１７」って書いてあると、
「$3+4+5\times 2=17$」って書けよ…って思いますよね？

「たす」を「$+$」に、「かける」を「$\times$」にしました。
これを「記号化」と言います。

記号化のメリット

「たす」を「$+$」とか、「かける」を「$\times$」とか。
このような「記号化」をすると、ちょいラクができます。

つまり、数学や物理で「良く使うもの」は、
記号化されていることが多いです。

例えば　$v \times t = x$　と言われると、もしかすると
得体の知れない恐怖を感じるかもしれません。

ですが「速さ×時間=距離」と言われたら、皆さんは小学校
の時に習ったなあ、と身近に感じると思います。

記号化の例

「速さ×時間＝距離」は、
頭文字をとって
「は×じ＝き」と省略して「はじき！はじき！」と、
暗記した人も居るかもしれません。

記号化の例

英語圏の人も一緒です。
速さ($velocity$)の頭文字「v」と
時間($time$)の頭文字「t」をとって、
距離(頭文字ではなく習慣的に位置の座標を意味する)「x」を

$v \times t = x$というように、記号で書きます。

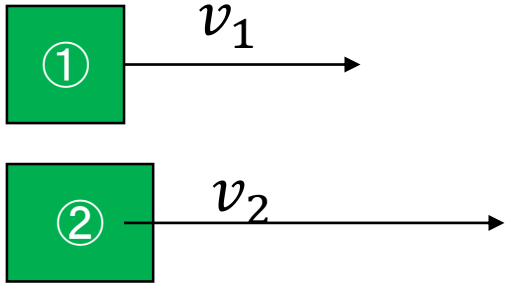
は×じ＝き
速さ　時間　距離

言ってることは、しょせん英語版の「はじき」です。

記号化の例

物理ではよく、記号の紹介を丁寧にする代わりに

「速度v_1で動く物体その①と、
速度v_2で動く物体その②がある」



のように書きます。　はじめは戸惑うかもしれませんが、

日本語で言ってみれば、
物体その①の速度を、速さの頭文字をとって「は①」
物体その②の速度を、速さの頭文字をとって「は②」
ってことにして考えましょう、と言っているだけです。

記号化ご紹介

物理学の大事な記号をちょっとだけ先に、紹介します。

m: $mass$**(マス)の頭文字で、質量を表します。単位は**$[kg]$。
メートルも$[m]$**と略されるので状況を見て混同しないように！**
「質量」と「重さ」「重力」等について詳しくは、第二章で。

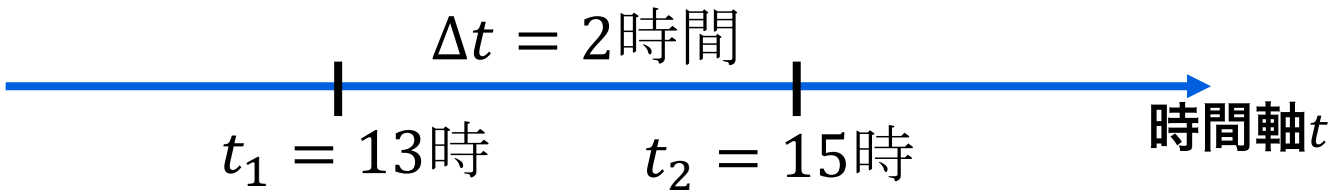
s: $seconds$**(秒)の頭文字で時間の単位[秒]を表します。**
$3[s]$ **=**$3[$秒$]$

特別な記号のご紹介

Δ ： 「デルタ」と読みます。 $\Delta x, \Delta t$他の記号の前にくっつけて
「その記号の変化量」を表します。

ギリシャ文字デルタ: Δは、アルファベットで言うとDをあらわし、
“difference(変化)”を略して言っただけです。

例えば、 tを時間 $(time)$を表す記号として、
Δtで、すなわち時間の変化量を表します。
下の図であれば、 $\Delta t = 15時 - 13時 = 2時間$です。



変化量Δを計算する時、上の例のように「後 − 前」で計算します。

このように、他の記号の前にくっつけて効果が発揮されるものを演算子(operator)と言います。

数式が「難しそう」「分からない」とき日本語にするクセをつけましょう。

これまで「数式はラクするため」だと話してきました。

「いちいち、長い言葉で記述する」かわりに、
「短く略記しました」ということが数式です。

だから「わかんないなー」と思ったら、
略記をやめて、日本語にする習慣をつけましょう。

日本語にできない時、それは数式が難しいのではなく、
あなたがその略記法を、単に知らないだけなのです。

数式が「難しそう」「分からない」とき日本語にするクセをつけましょう。

例えば、苦手な人が多い記号に

$$\sum_{i=0}^{10} i$$

があります。
このギリシャ文字Σ(シグマ) は英語でいうとSを意味し、
Sum(合計する)という意味の「略記」なので、
慣れるまでは必ず分解して日本語にしましょう。

今回のSumの意味はこうです：

$i = 0$から$i = 10$まで、全部足すよ！

つまり$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

単に、このことを11個書くのがメンドイので略してるだけです。

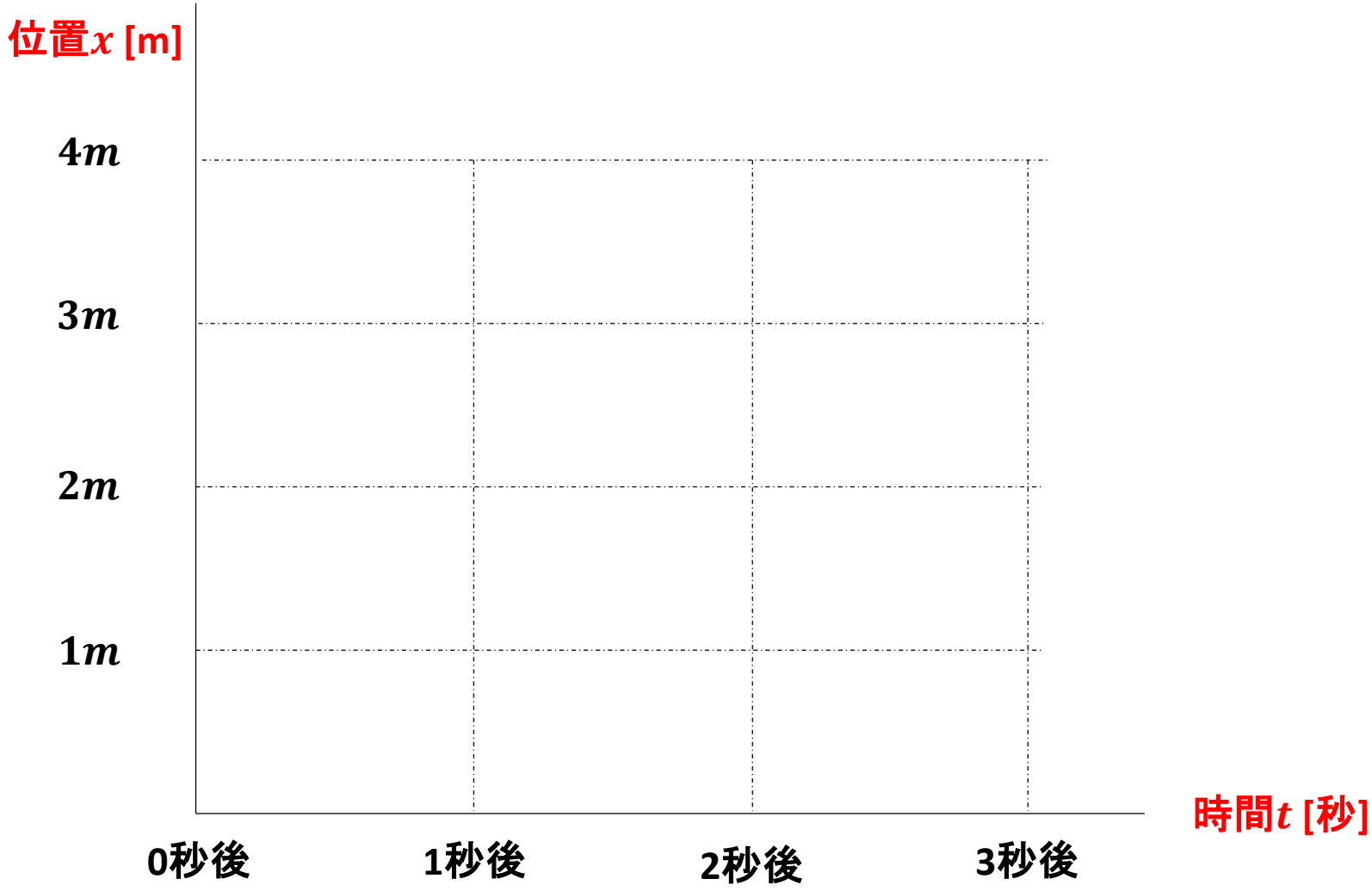
ここからの第一章ではまず、

・運動は一次元（高さだけとか、直線移動だけとか）
・速度が変化しない（つまり「加速」しない）

場合を扱います。
このような運動を等速度直線運動と呼びます。

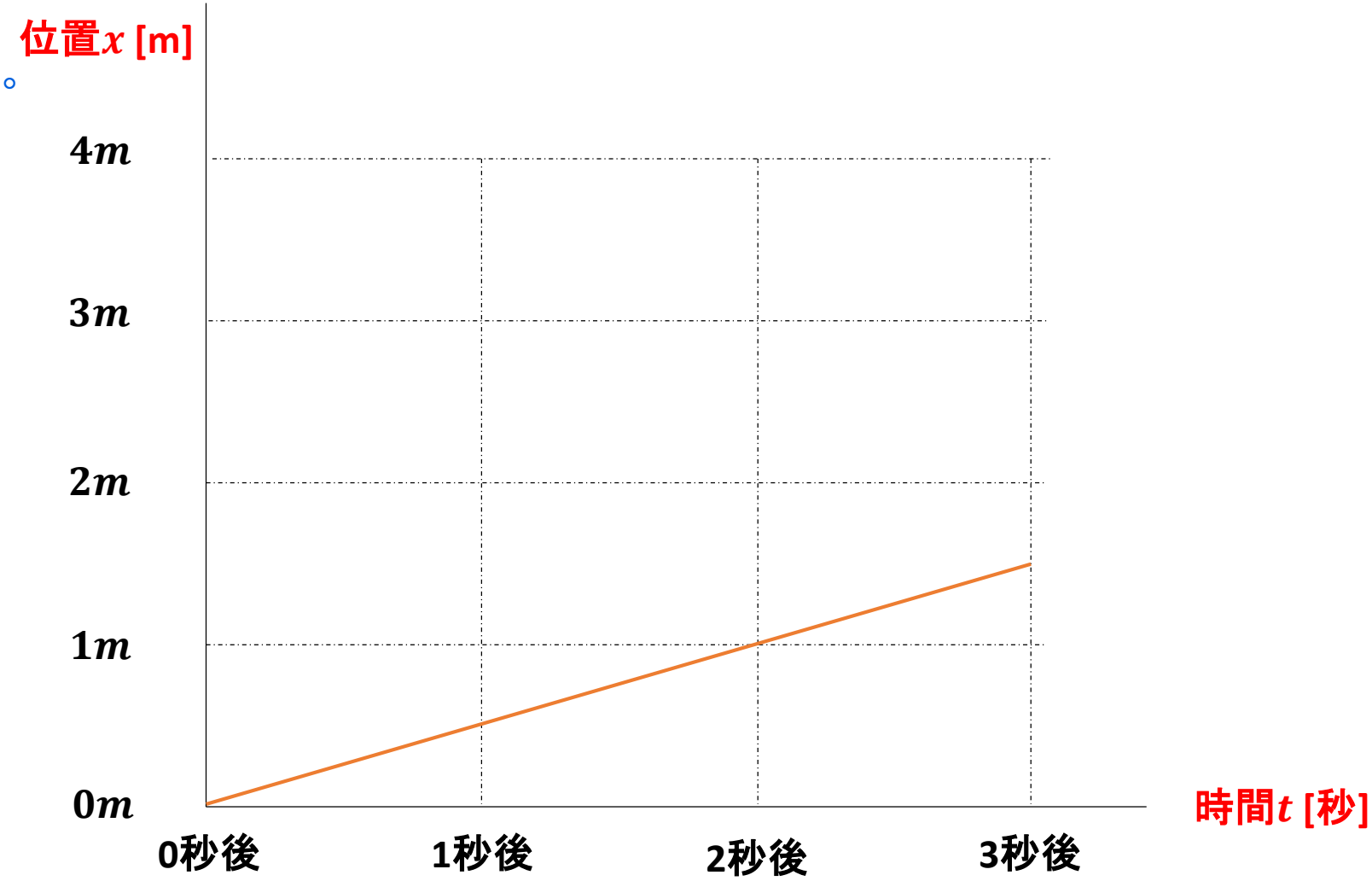
シンプルなところから、確実に理解をして、
そうして遠くまでいきましょう。

練習問題:秒速0.5mで歩く人を $x-t$図で表してみましょう

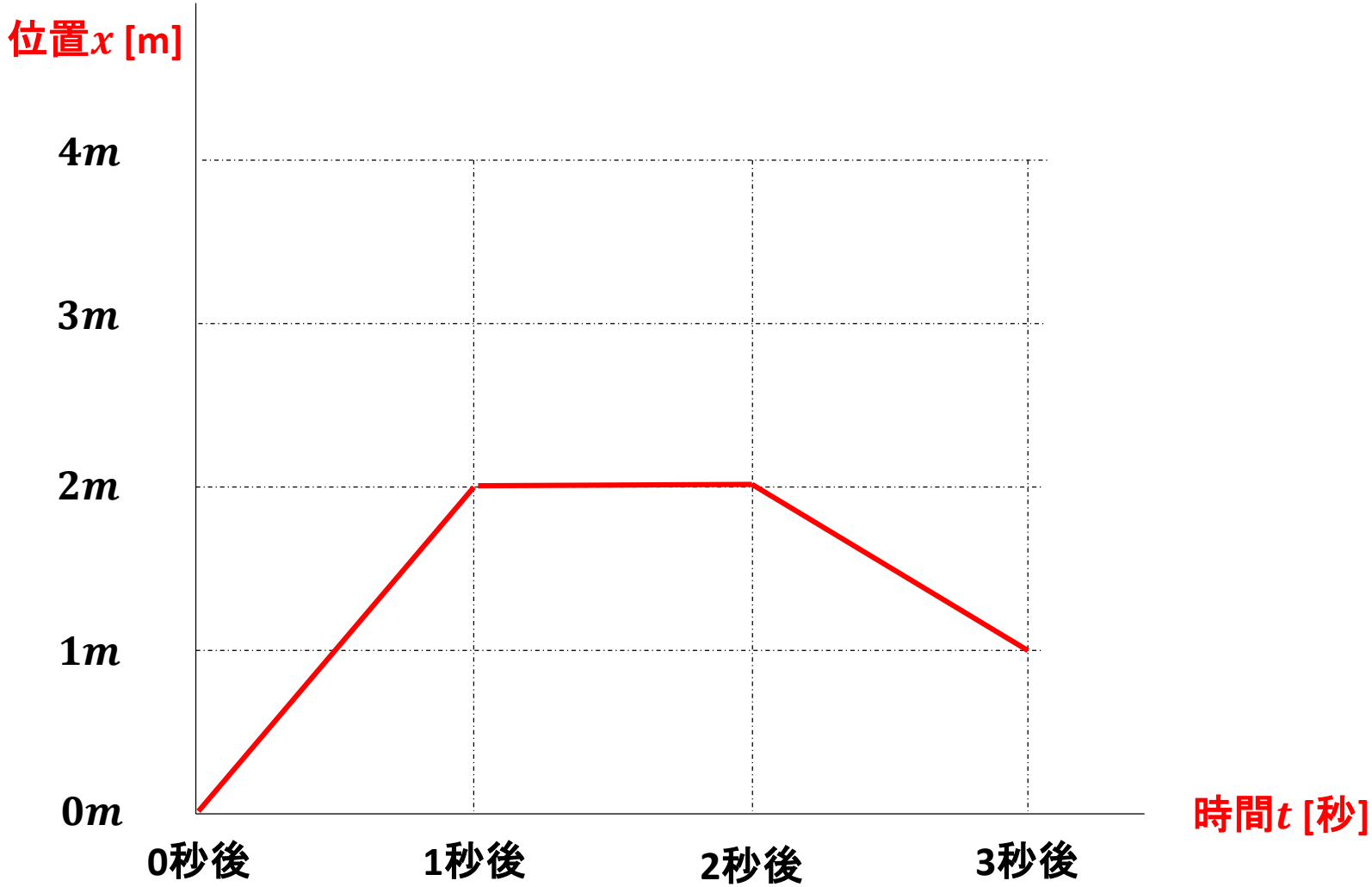


練習問題:秒速0.5mで歩く人を $x-t$図で表してみましょう

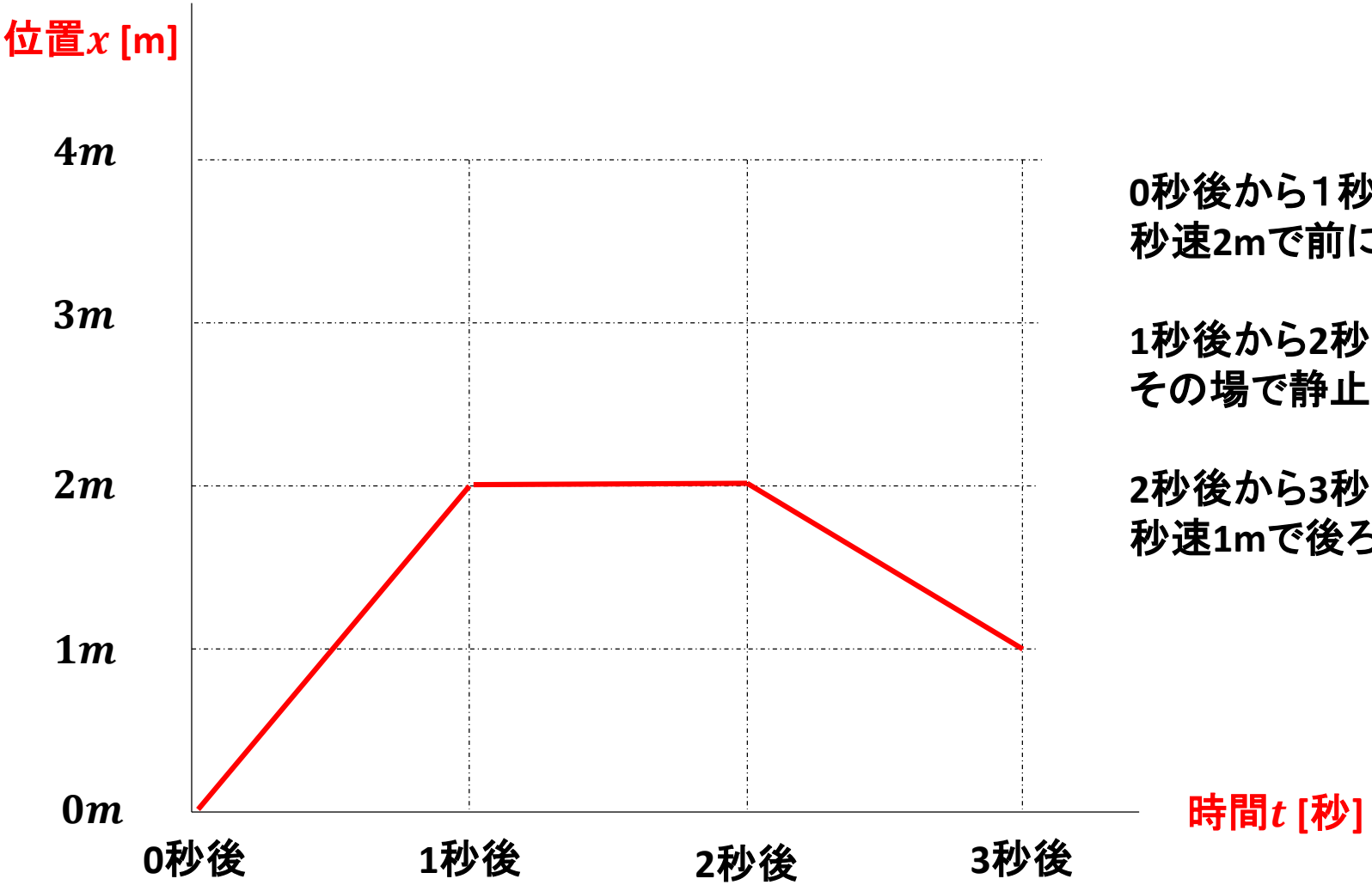
★速さじゃなくて
位置のグラフです。



練習問題:この$x-t$図が意味することを、日本語で表現してみましょう



練習問題:この$x-t$図が意味することを、日本語で表現してみましょう

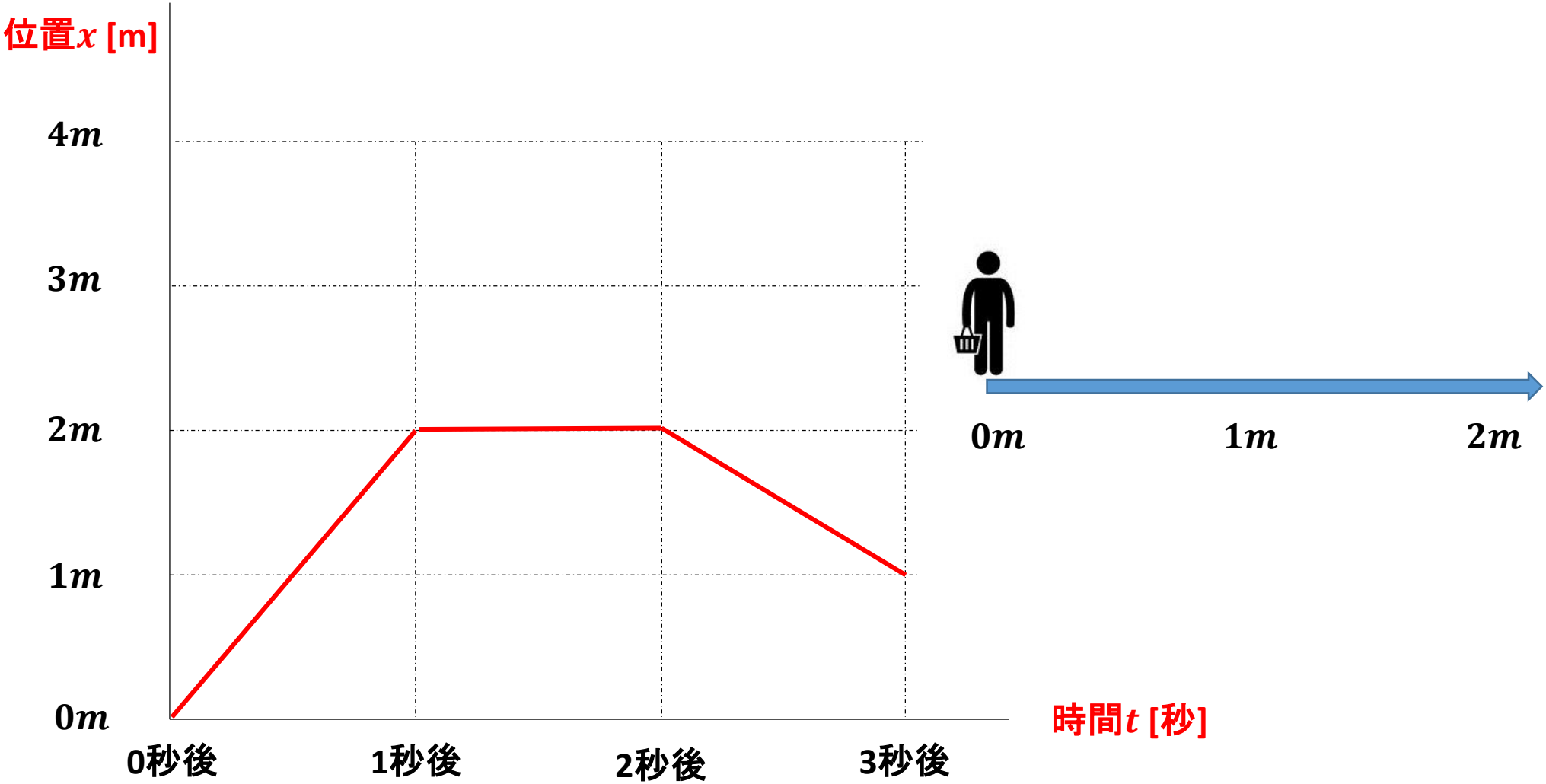


0秒後から1秒後にかけて、
秒速2mで前に進んだ。

1秒後から2秒後にかけて、
その場で静止していた。

2秒後から3秒後にかけて、
秒速1mで後ろに

練習問題:この$x-t$図が意味することを、日本語で表現してみましょう



速度

『速度』って、一体なんでしょうか？

速度

「速度」の練習問題

①：秒速2mで3秒歩くと、何m進むでしょう？

②：6m先まで、秒速2mで歩くと何秒かかる？

③：6m進んだ時、3秒経ってました。秒速は？

レベル1：位置と時間

①：秒速2mで3秒歩くと、何m進むでしょう？
②：6m先まで、秒速2mで歩くと何秒かかる？
③：6m進んだ時、3秒経ってました。秒速は？

これらの問いは、
下の「方程式(等号で繋がった式)」の中で
求めたい数(未知数)が違うだけです。

速度v		時間Δt		距離Δx
秒速2メートル	×	3秒	＝	6メートル

★物理では変化量をΔという記号で表すよ。
変化は　あと(最近)ーまえ(昔)　だよ

余談②

ホントはあんまりアタマを使わずに解くために考えだされたのが「方程式」！

方程式は「形式的」に解ける！！

「方程式」は何のため！？

物理学者が自然を理解する「武器」が「方程式」です。

物理学では「方程式」の形で、自然界を記述します。

方程式を解くことで、物体の運動を予測し、ロケットを飛ばし、天体の運行を予測し、車のエンジンを設計するのです。

武器の使い方

この「方程式」という武器は、実は取扱が簡単な武器です。

実は、方程式はあんまりアタマを使わなくても解けるんだ、
ってことを、これから納得してもらいます。

方程式とは？

方程式は英語ではEquationと言います。
Equationとは、
Equal(イコール、つまり等号「=」)が含まれる式の事です。

例えば

$$14x + 15 = 71$$

は、方程式の一種です。イコールがあるからです。
この式の中でのxは「変数」または「未知数」と呼ばれます。

「xを求めよ」と言われた時、それを求めることを
「方程式を解く」と言います。

イコールが意味すること

「方程式」は等号、つまりイコールで結ばれた式のことだ、
ということを見てきました。

$$(\text{左辺}) = (\text{右辺})$$

と書いてあるものが、方程式です。

では、例えば$1 + 3 = 4$もイコールで結ばれた式ですが、
それとはどう違うのでしょうか？

方程式の場合は、$(\text{左辺}) = (\text{右辺})$の少なくともどちらかに、
未知数(まだ分からない数)があります。
この未知数を多くの場合でxと呼んだりします。

未知数ってなんだ？

では、未知数xとは、いったい、それは、何でしょうか？

たとえば、次の式を見て下さい。

$$y = 14x + 15$$

この式は、

xに、0や1や、2を入れたりできます。

$x = 0$の時$y = 15$

$x = 1$の時$y = 29$

$x = 2$の時$y = 43$

です。

つまり、普通はxには、色んな数を入れられるということです。

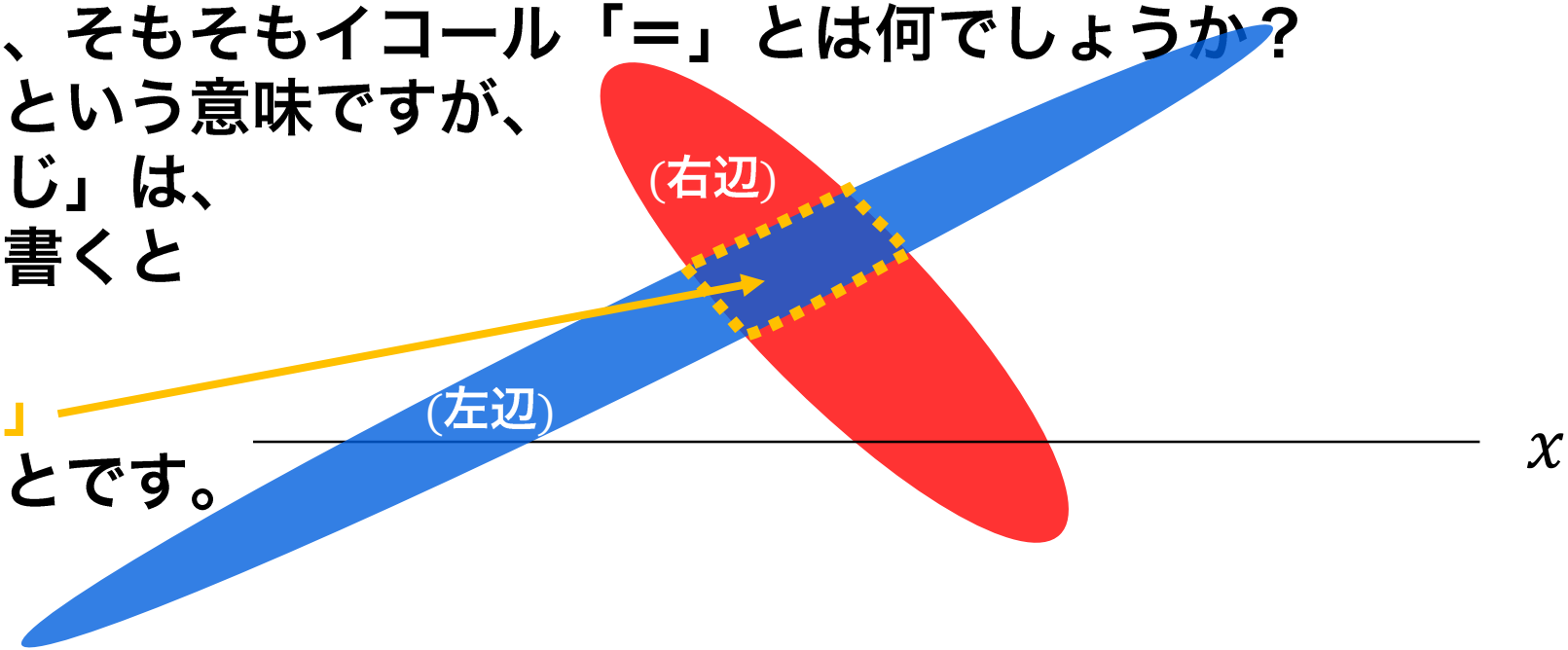
イコールが意味すること

ここまでで、「方程式」は等号、つまりイコールで結ばれた
未知数xを持つ式のことだ、ということを見てきました。

(左辺) = (右辺)

このとき、そもそもイコール「=」とは何でしょうか？
「同じ」という意味ですが、
この「同じ」は、
もし図で書くと

「重なる」
ということです。

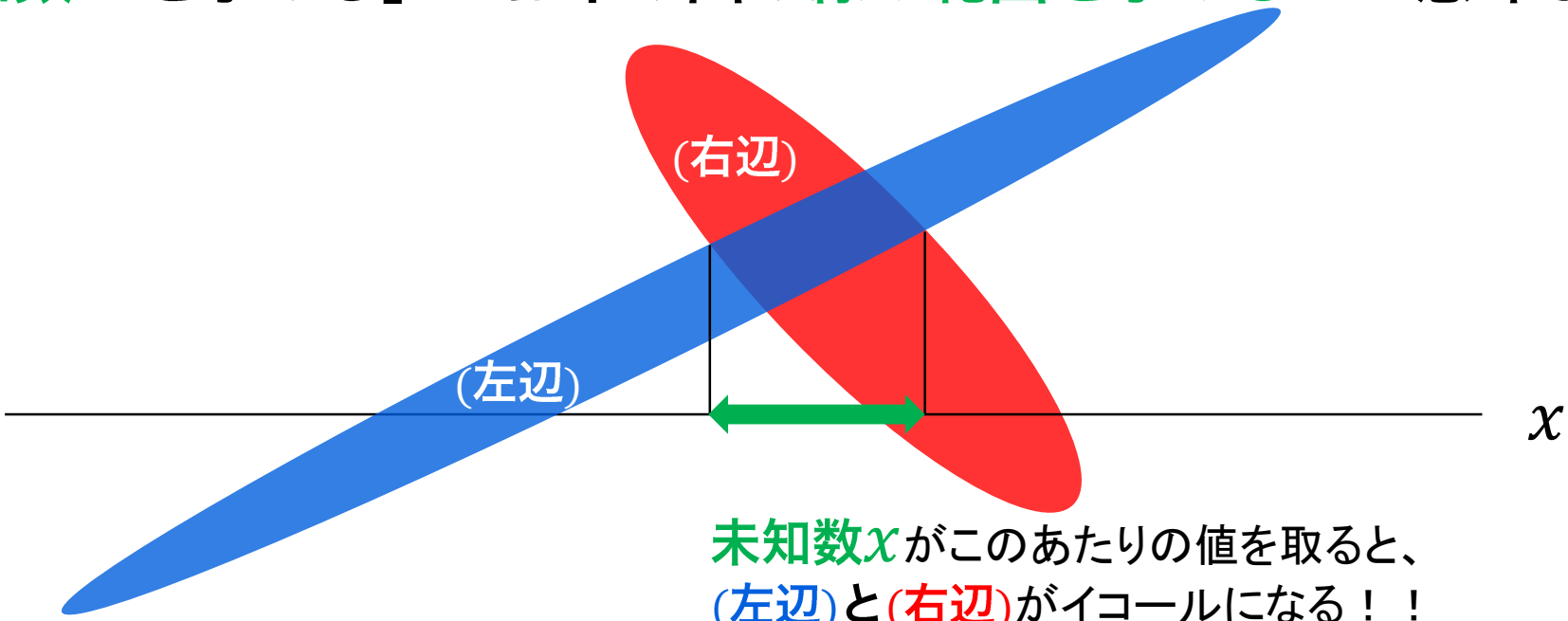


「未知数xを求める」が意味すること

ではxが色んな値が取れることがわかりました。一般に

$$(\text{左辺}) = (\text{右辺})$$

が方程式であるとき、ざっくり言うと
「未知数 x を求める」とは下の図の緑の範囲を求めること意味します。

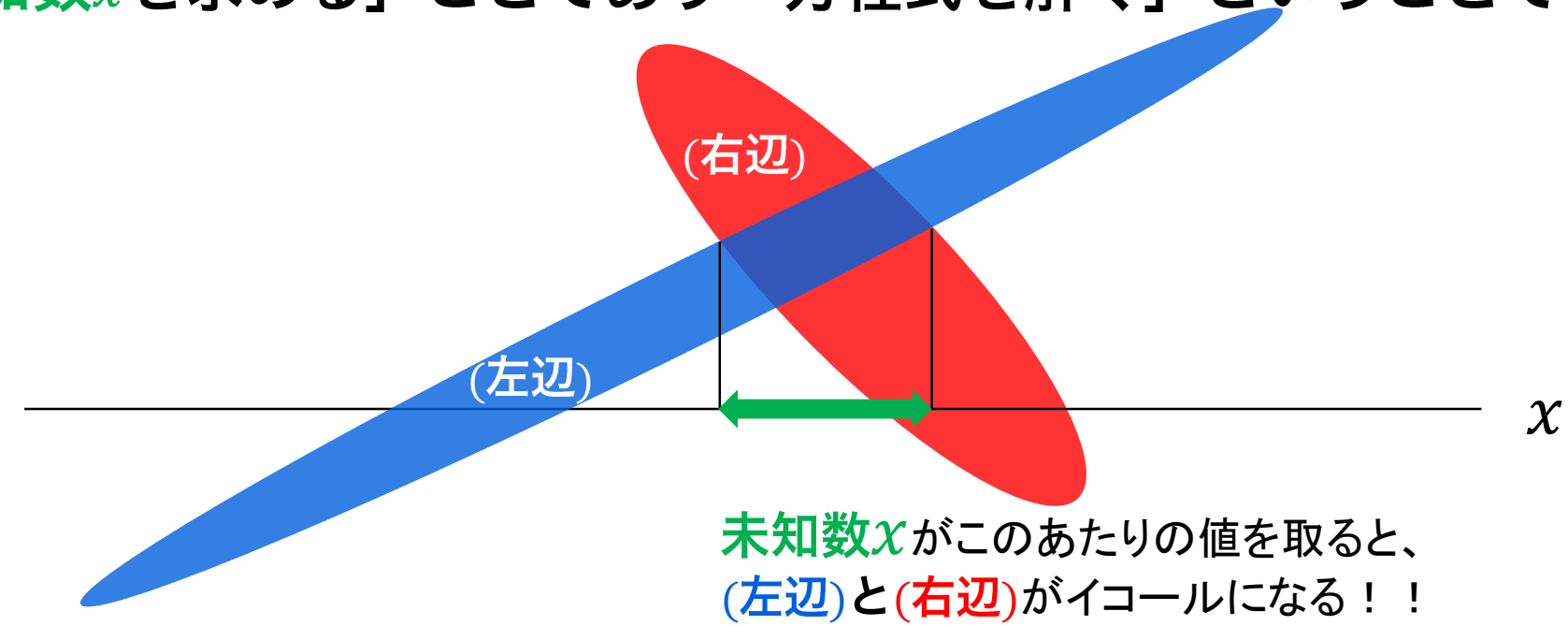


未知数xがこのあたりの値を取ると、
(左辺)と(右辺)がイコールになる！！

「未知数xを求める」が意味すること

つまり、一般に(左辺)も(右辺)も、多くの可能性を持っている。

その可能性を　(左辺) = (右辺)
の時だけに限定する。
その「限定」を満たせるのx の値を求めることが、
「未知数xを求める」ことであり「方程式を解く」ということです。

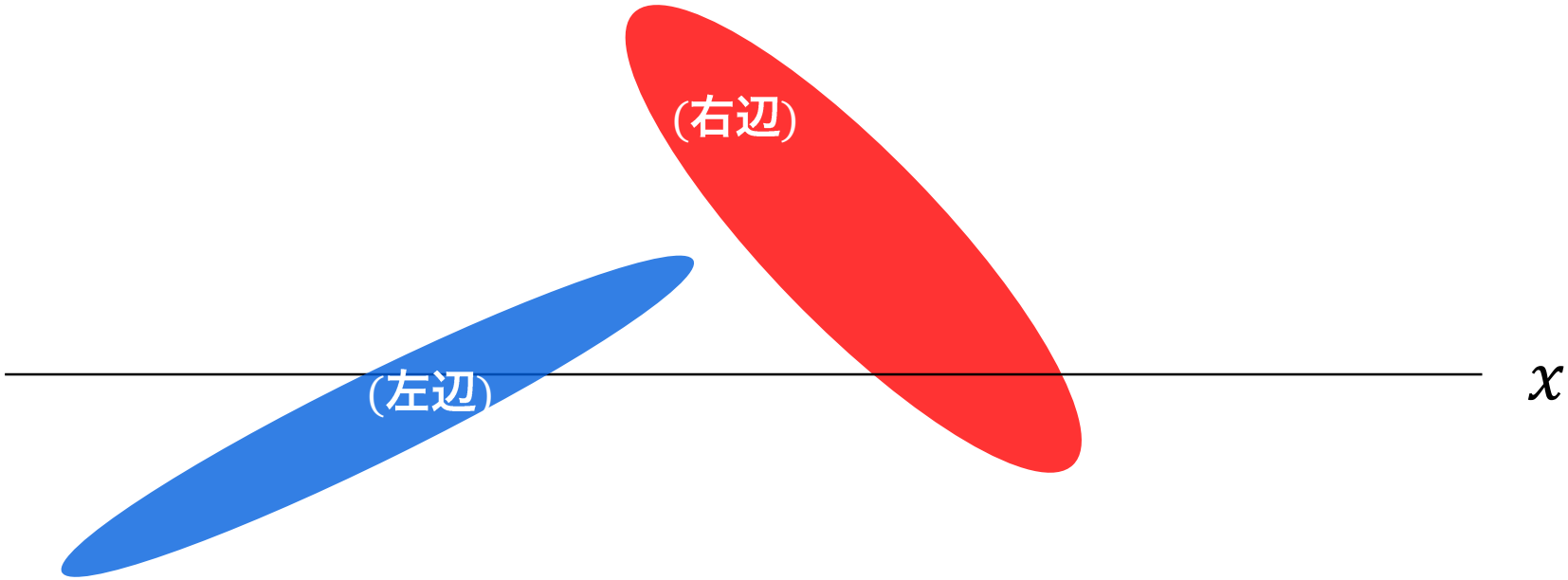


「解なし」が意味すること

ちなみに、xがどんな値を取ろうが、

(左辺) = (右辺)にならない

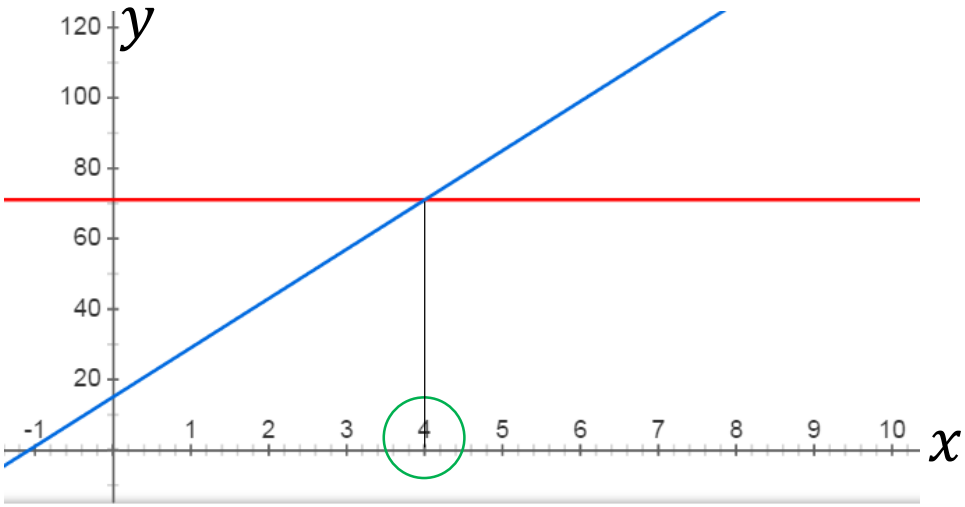
とき「解なし」と言います。図でいうと以下のイメージです。



「未知数xを求める」が意味すること

例えば、方程式「$14x + 15 = 71$」では、
下のようなグラフを描くことが出来ます。
(グラフの書き方は、第一章でのちほど扱います)。

(左辺) $= 14x + 15$　**および**　**(右辺)** $= 71$　**でグラフを描きましょう**



今回は「$x = 4$」の時だけ、
(左辺) = (右辺)が成立します！

つまり、青い式と赤い式が、
グラフ上で交わる場所があれば、
それを満たす未知数x求めることが「方程式を解く」ということ。
範囲を絞り込むイメージ。

方程式を「機械的に」解くには？

しかし「方程式を立てる」ことの強みは、

「あんまりアタマを使わなくても、
形式的な操作手順を知っていれば、答えが出せる」
ということにあります。

驚かれるかもしれませんが実は、
方程式は、天才的な閃きが必要なのではなく、
アホでも操作手順を知っていれば、方程式を解ける
（あるいは、解が無いことが分かる）

という、むしろ数学がデキない人のために発明されたものなのです。

方程式を解くには？

だから、みなさんが

「うわ〜。方程式やー！めっちゃムズそう…。心折れるわ…」

と嘆いている時、数学がデキる人は
「あー、これでアホでも解けるようになったわ。計算とかは大変かもしれないけど、光が見えてきたな〜！」って思ってます。

今日は、その「操作手順」の話をします。

方程式を解くには？

方程式を解く目標

$x = (x$を含まない数や数式$)$　という形を目指します。

そのために、次の操作手順を守ります。

操作手順：

- 「＝」の両側に、同じ操作をする。
- 同じ操作とは、同じ数を足したり掛けたりすること。
- 同じ操作とは、同じ数で割ったり引いたりすること。

です。次のページで具体的に見ていきます。

※両辺をゼロで割る＆ゼロを掛けるのは勘弁な！

方程式を解くには？

目標：
- 未知数x = (xを含まない数や数式)
  という形を目指します。

操作手順：
- 「＝」の両側に、同じ操作をする。
- 同じ操作とは、同じ数を足したり掛けたりすること。
- 同じ操作とは、同じ数で割ったり引いたりすること。

元の式： $14x + 15 = 71$

この「＝」の両側から同じ数「15」を引き算してみましょう！

$14x + 15 - 15 = 71 - 15$

計算すると…

$14x = 56$

$14x = 56$

さらにこの「＝」の両側から同じ数「14」で割ってみましょう！

$14x \div 14 = 56 \div 14$

計算すると…

$x = 4$

解けた！

練習しよう

目標：
- 未知数x = (xを含まない数や数式)
  という形を目指します。

操作手順：
- 「＝」の両側に、同じ操作をする。
- 同じ操作とは、同じ数を足したり掛けたりすること。
- 同じ操作とは、同じ数で割ったり引いたりすること。

元の式： $3x - 5 \quad = \quad 7$

この「＝」の両側から同じ数「　」を
　　算してみましょう！

＝

計算すると…

＝

＝

さらにこの「＝」の両側から
同じ数「　」を
　　算してみましょう！

＝

計算すると…

x ＝

解けた！

速度の話しに戻りましょう。

①：秒速2mで3秒歩くと、何m進むでしょう？
②：6m先まで、秒速2mで歩くと何秒かかる？
③：6m進んだ時、3秒経ってました。秒速は？

これらの問いは、
下の「方程式(等号で繋がった式)」の中で
求めたい数(未知数)が違うだけです。

速度v		時間Δt		距離Δx
秒速2メートル	×	3秒	＝	6メートル

★物理では変化量をΔ(デルタ)という記号で表すよ。
変化は　あと(最近)ーまえ(昔)　だよ

方程式の操作

①：秒速2mで3秒歩くと、何m進むでしょう？

秒速2メートル　×　3秒　＝ [redacted]

②：6m先まで、秒速2mで歩くと何秒かかる？

秒速2メートル　× [redacted] ＝　6メートル

③：6m進んだ時、3秒経ってました。秒速は？

[redacted] ×　3秒　＝　6メートル

★物理では変化量をΔという記号で表すよ。
変化は　あと(最近)ーまえ(昔)　だよ

「速度」が定義できますか

「はじき」って
英語で
言ってるだけ

$$\text{速度}v \times \text{時間}\Delta t = \text{距離}\Delta x$$

上の<u>方程式</u>を「速度v ＝ 」の式にして、速度を定義したい！
両辺を、時間Δtで割ってみると

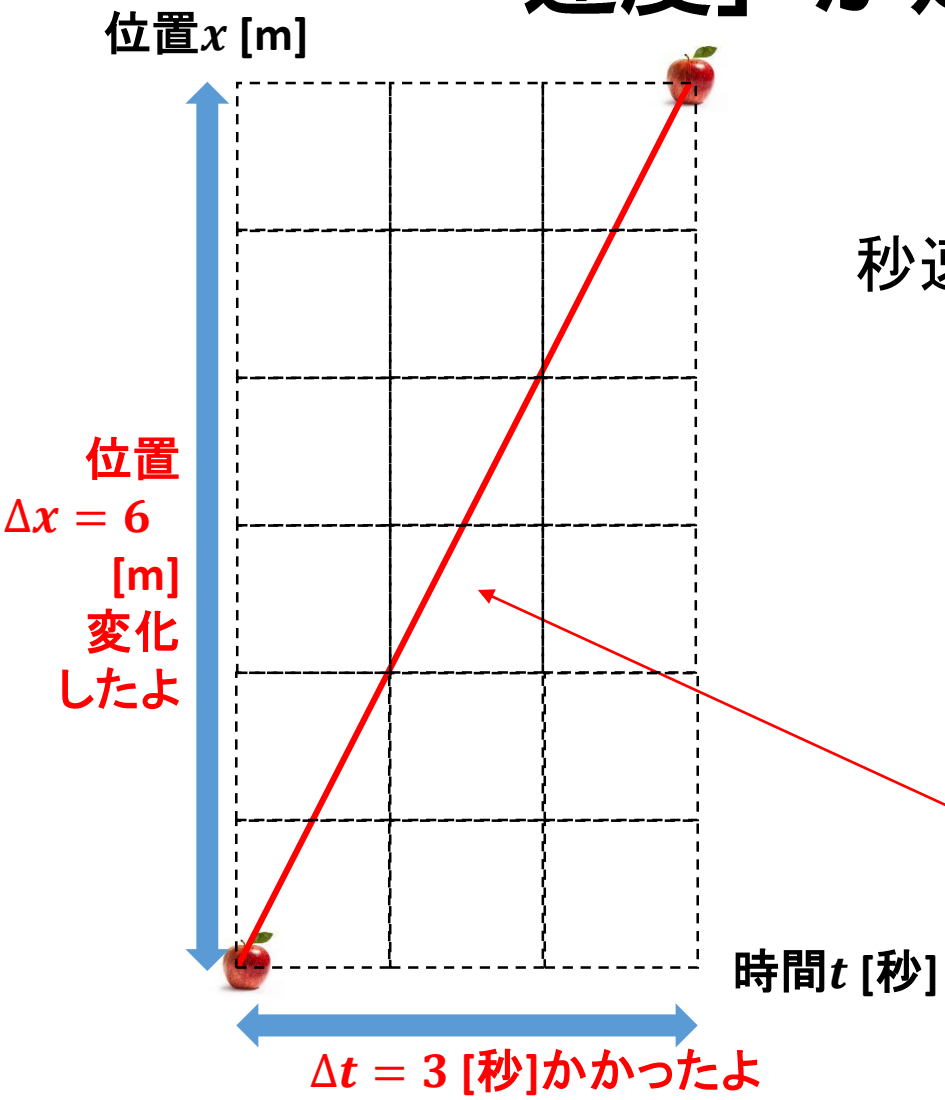
$$\text{速度}v \times \text{時間}\Delta t \div \text{時間}\Delta t = \text{距離}\Delta x \div \text{時間}\Delta t$$

$$\text{速度}v = \frac{\text{距離}\Delta x}{\text{時間}\Delta t}$$

具体例で言うとこれと同じこと

$$\boxed{\text{秒速}2[m] = \frac{6[m]\text{移動したよ}}{3\text{秒かかったよ}}}$$

「速度」が定義できますか



$$\text{秒速2メートル} = \frac{\text{6メートル移動したよ}}{\text{3秒かかったよ}}$$

$$\text{速度}v = \frac{\text{距離}\ \Delta x}{\text{時間}\ \Delta t}$$

この赤線の「傾き」が「速度」だよ

第一章
位置と時間

数学の復習①〜１次関数と傾き〜

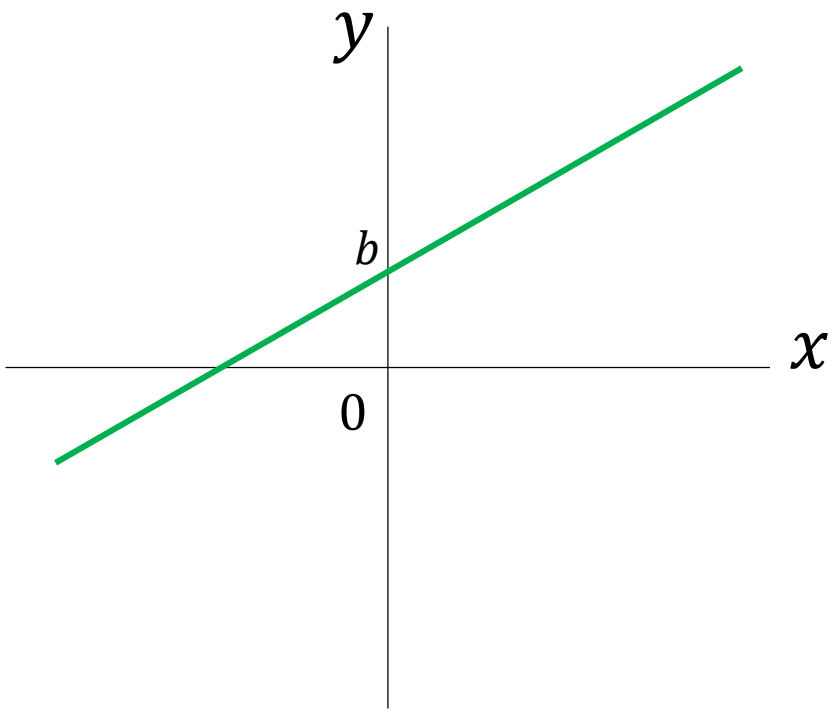
数学の復習をしましょう！
「傾き」ってなんだ？

1次関数

$$y = ax + b$$

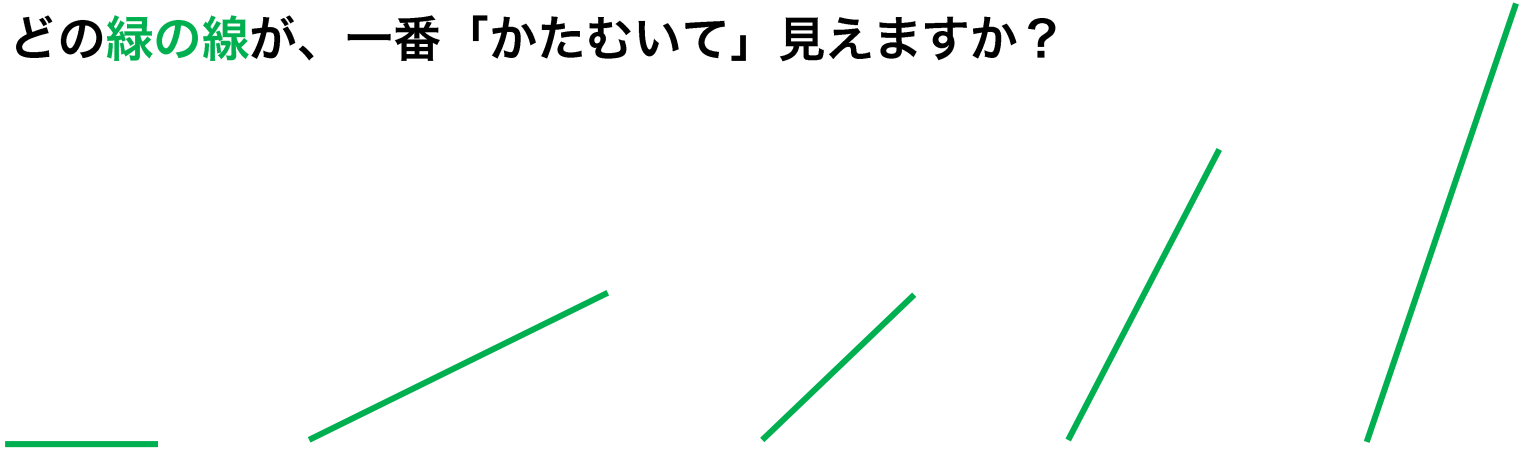
このaが「傾き」です！はい暗記！！
って習いませんでしたか？

正しいけど、「理解」していないなら、
1回忘れよう！



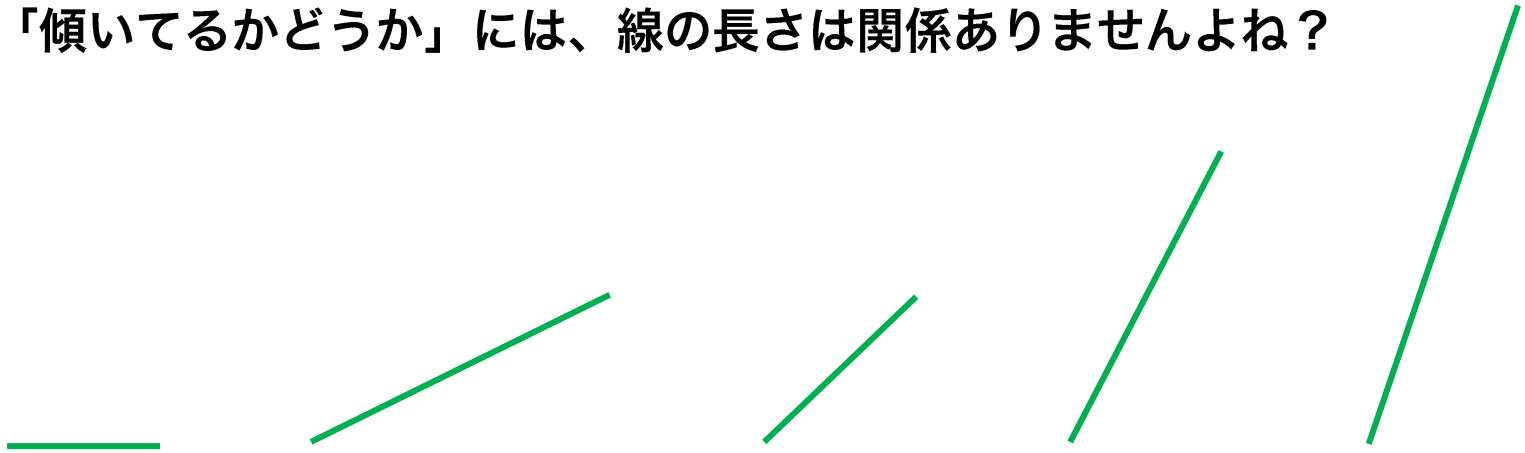
「傾き」ってなんだ？

どの緑の線が、一番「かたむいて」見えますか？



「傾き」ってなんだ？

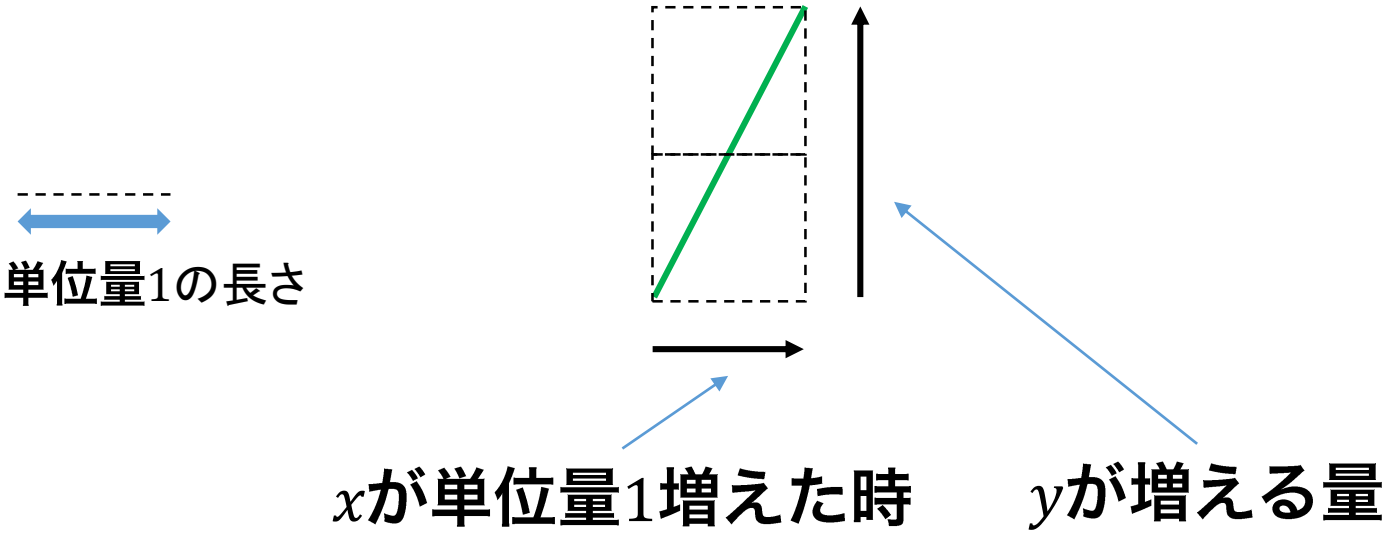
「傾いてるかどうか」には、線の長さは関係ありませんよね？



あなたが数学の創始者だったら「傾き」をどう定義しますか？
どう定義したら後世の数学者が喜ぶでしょうか？

「傾き」を定義しよう

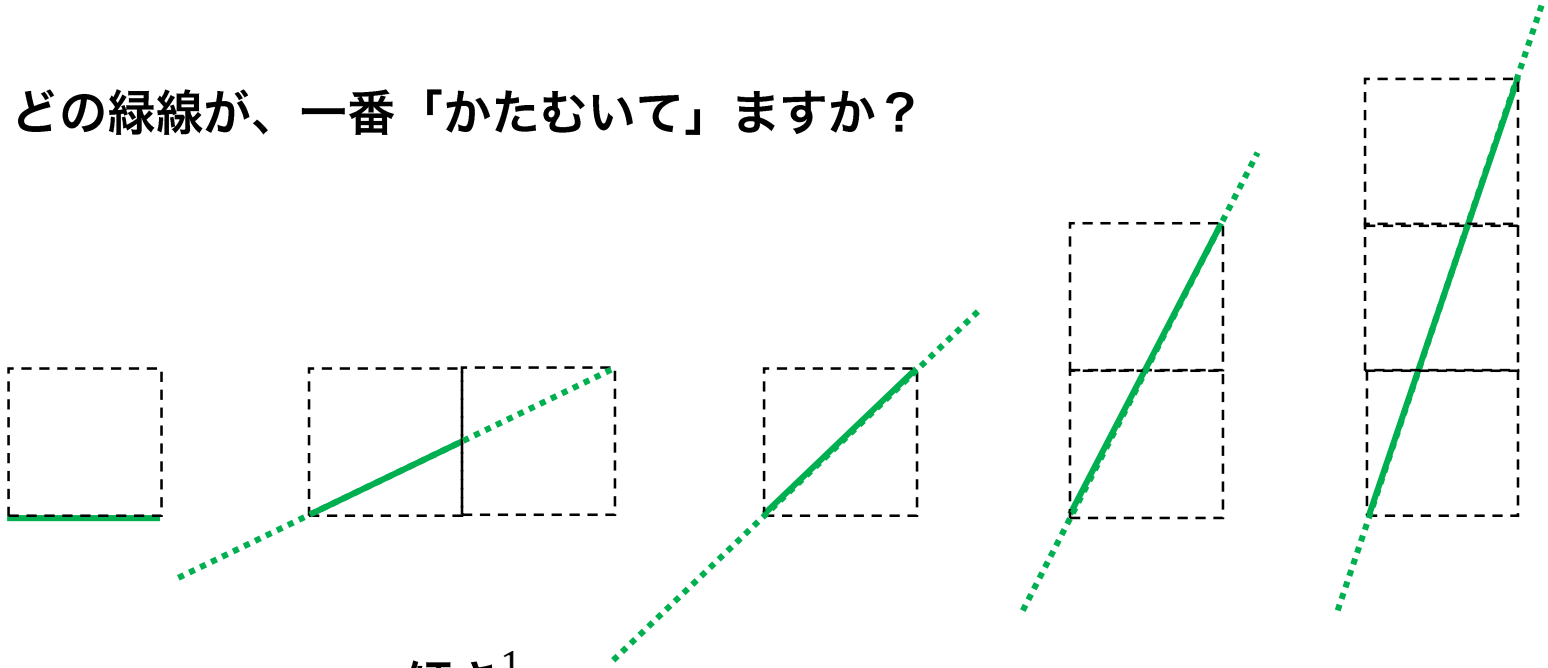
xが単位量1増えた時、yが増える量で定義する



この場合xが1増える時に、yが2増えているので傾き2

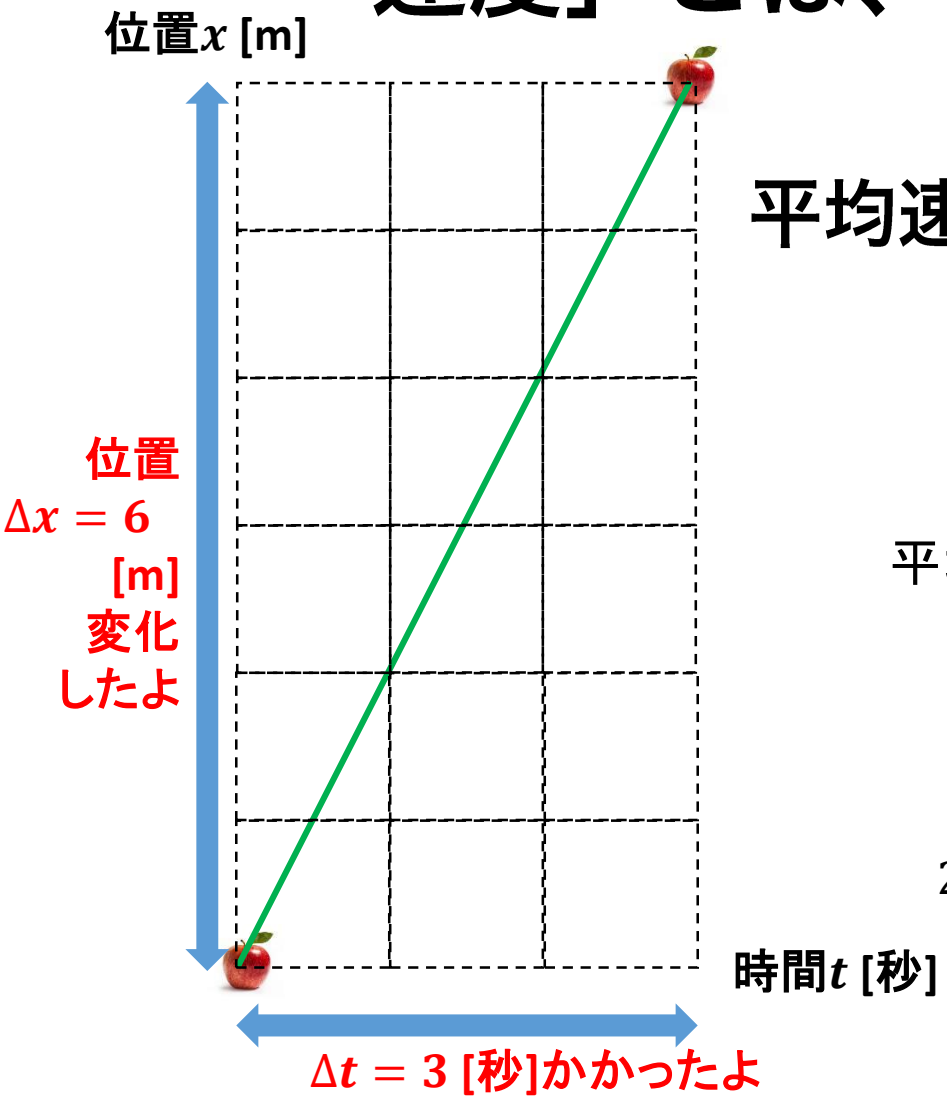
数学の復習をしましょう！
「傾き」ってなんだ？

どの緑線が、一番「かたむいて」ますか？



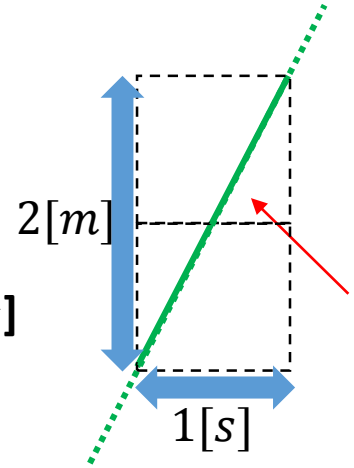
傾きゼロ　傾き$\frac{1}{2}$　傾き1　傾き2　傾き3

「速度」とは、$x-t$グラフの傾き



$$\text{平均速度}v[m/s] = \frac{\text{位置の変化}\ \Delta x[m]}{\text{掛かった時間}\ \Delta t[s]}$$

$$\text{平均速度 秒速2メートル} = \frac{\text{6メートル移動したよ}}{\text{3秒かかったよ}}$$



この「傾き」が「速度」だよ
いま傾きは「2m/s」だよ

第一章 位置と時間

数学の復習②〜ちゃんと分かる関数〜

ちゃんとわかる函数/関数

物理では、これまで見てきたように
$x-t$図のような、
二次元の図を書くことが多いです。

二次元の図を取り扱うために、
関数の理解/操作が
できることに、価値があります。

ちゃんとわかる函数/関数

そもそも「関数」ってなんでしょうか？

関わる…数…?
なんだ…それは…!?

ちゃんとわかる函数/関数

「関数(かんすう)」は、
もともとは「函数(かんすう)」と書きました。

「函」とは、箱のことです。
函館(ハコダテ)のハコです。

戦後漢字を簡単にする中で
読み方が同じ別の漢字に変えられました。

では、函(ハコ)の数ってどういう意味でしょうか？

函の中身

ふつう、開けてみないと、
函(ハコ)の中身はわかりません。

いわゆる、ブラックボックスです。

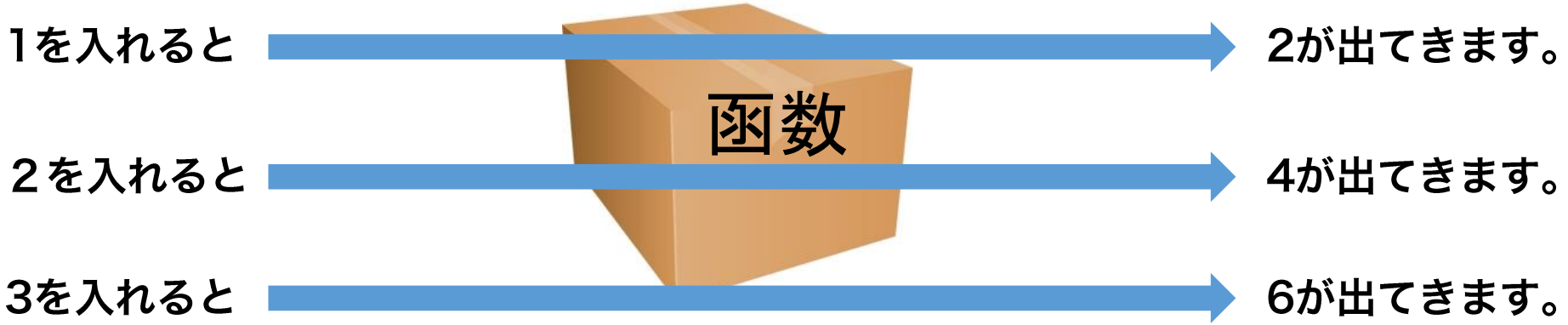
函のI/O

この「函」は機能を持った函です。

機能というのは、
インプットした時に、
何か函の中で操作がされて、
アウトプットがあるということです。

函の機能を調べよう

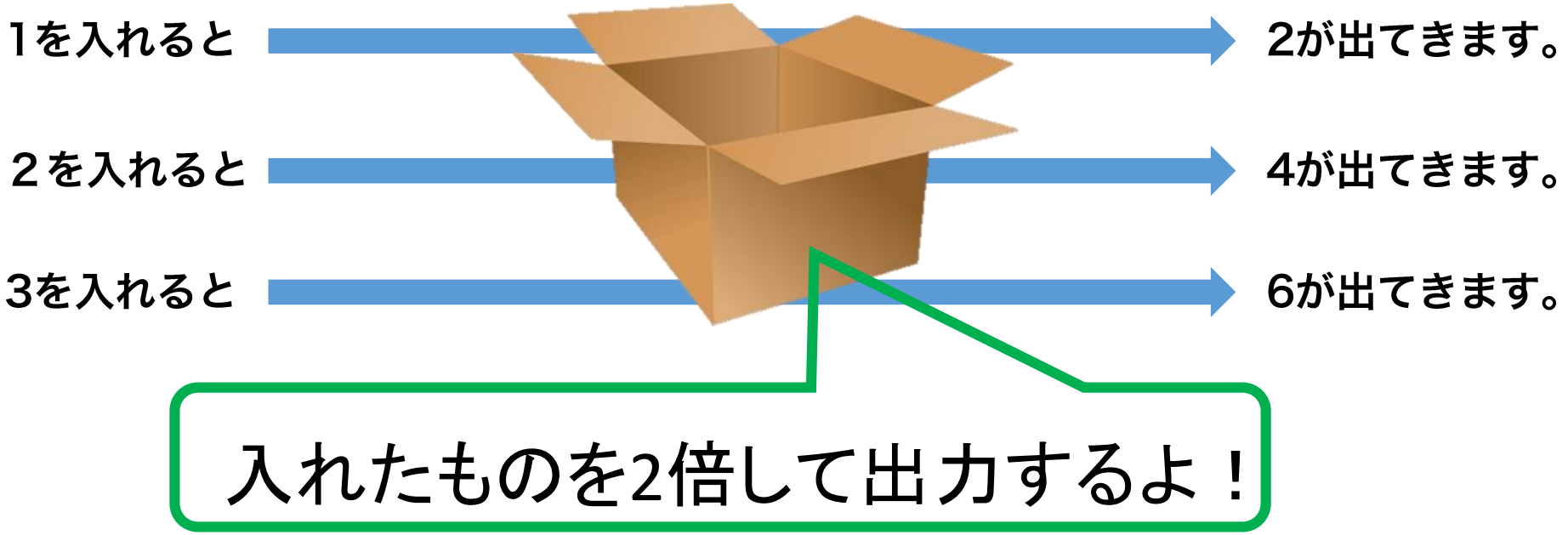
函数は、機能を持った函なので、英語では*function*(機能)と言います。だから数学では函数は*f*で表現されます。



この函数はどんな機能を持っているでしょう？

函の解体

機能を持った函を開けると、「入れたものを2倍する」機能を持ってました



ここでもやりましょう「記号化」です

「機能の説明」を簡単にしたい。

ボクの機能($function$)は
入れたものを　2倍にするよ
と書く代わりに、

$$f(x) = 2x$$

と書きます。楽ちんだからです。

ここでもやりましょう「記号化」です

「機能の説明」を簡単にしたい。

ボクの機能($function$) は　入れたものを
自乗して3倍して2を足すよ
と書く代わりに、

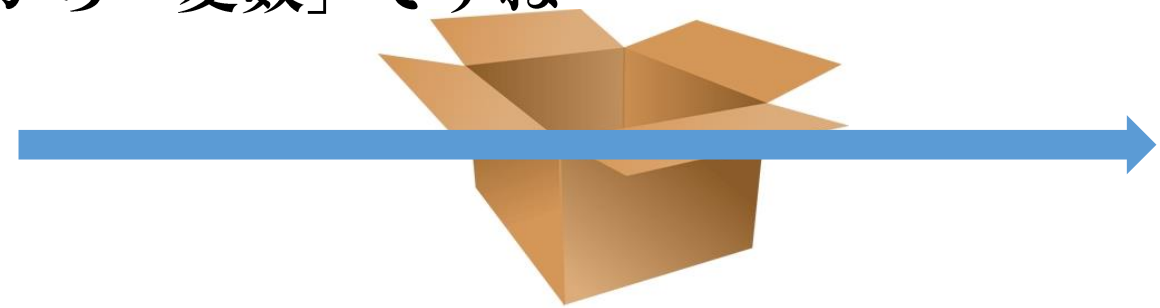
$$f(x) = 3x^2 + 2$$

と書きます。楽ちんだからです。

「変数」ってなんでしょう
用語の定義

函に入れるものの事を
「変数」と言います。
好きに入れられる、
変えられるから「変数」ですね

変数xを
入れると



$f(x)$が
出てきます。

ボクの機能　は　入れたものを　2倍にすることだよ

$$f(x) = 2x$$

「代入」ってなんでしょう

函に数字を放り込むことを「代入」と言い次のように書きます。

$$f(x) = 2x$$

これに1を入れると → 2が出てきます。

$$f(1) = 2 \times 1 = 2$$

中で操作をされて

代入は機械的にできます！

代入とは、読んで字の如く「代わりに入れる」。だから、難しそうでも代入は、機械的にできます。

$f(x) = 2x$

x の代わりに「3」を入れると $f(3) = 2 \times 3$

x の代わりに「4」を入れると $f(4) = 2 \times 4$

x の代わりに「a」を入れると $f(a) = 2a$

例えば難しそうな式：$f(x) = x^4 + e^x + x$ でも、
機械的に代入だけはできるはず！

x の代わりに「3」を入れると $f(3) = 3^4 + e^3 + 3$

x の代わりに「4」を入れると $f(4) = 4^4 + e^4 + 4$

x の代わりに「a」を入れると $f(a) = a^4 + e^a + a$

コラム：函数の観方

数学が得意な人は「函数」をふつうの人が見るのとは違うものの観方で、見ています。

つまり、観ているポイントが違うから、
普通の人よりも「函数の意味」がよく分かるのです。

通常の理系の人は、微積分に習熟する過程で、
その観方を自然に身につけます。

けれど、文系の人はそうではありません。
その観方を今日は開示します。

コラム：函数の観方

たとえば

$$f(x) = 2x + 2 + 3y + 6t^3 + 3\pi$$

という数式を見ると、慣れていない人はビビると思います。

けれど、訓練されている人は

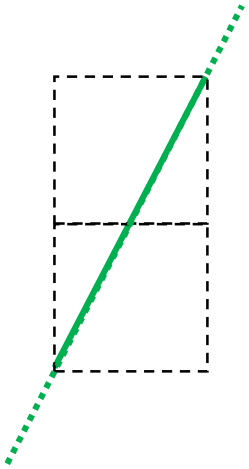
$$f(x) = 2x\ (+2 + 3y + 6t^3 + 3\pi)$$

というように見ます。xの函数であることが$f(x)$で明示されている以上、大事なのはxとそれにくっついている数字それだけです。

コラム：函数の観方

$$f(x) = 2x\ (+2 + 3y + 6t^3 + 3\pi)$$

この式を見た時、数学に習熟した人は



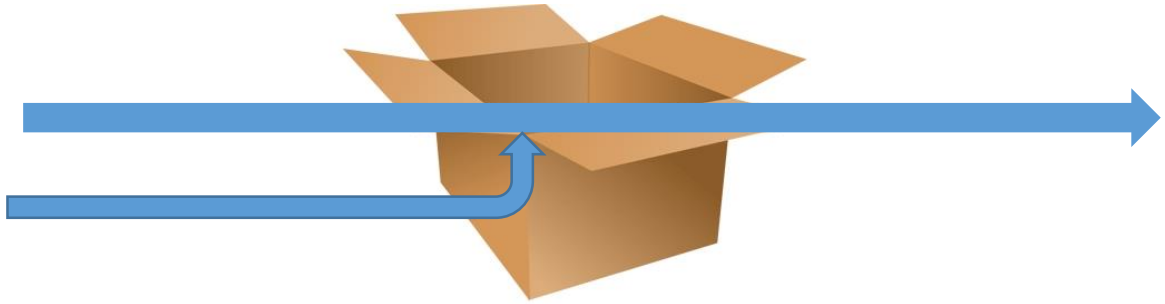
←どうせ、縦軸に$f(x)$とってグラフ描けば
こういう形のグラフになって、
原点から

$$(+2 + 3y + 6t^3 + 3\pi)$$

この分だけズレてるんでしょ。はいはい。
って思ってます。

「2変数函数」もインプットが2つあるだけ

変数xと
変数yを
入れると



$f(x, y)$が
出てきます。

ボクの機能　は
入れたものその１(変数x)と入れたものその2(変数y)
を足すことだよ

$$f(x, y) = x + y$$

この自販機は、どんな函数でしょう？

この自販機は、6変数の函数でした！

変数：
- お金
- ドリンクの種類
- 氷の有無
- 砂糖の量
- クリームの量
- コーヒーの濃さ

出力：
- お釣り
- コーヒー（調整済）

ボクの機能　は　選ばれたドリンクを出すことだよ。
入れられたお金からドリンクの値段を引いてお釣りを出すよ。
押されたボタンに応じて、
氷を入れたり、砂糖・クリーム・コーヒーの濃さを調整するよ。

f(お金, 種類, 氷, 砂糖, クリーム, 濃さ) ＝ (金 − 値段)＋調整済みコーヒー

練習問題：やってみよう、機械的代入

$$f(x) = 2x^2 + 7x + 3y - 4t + 5$$

x に「2」を代入すると $f(2) =$

x に「3」を代入すると $f(3) =$

x に「a」を代入すると $f(a) =$

x に「$2x$」を代入すると $f(2x) =$

練習問題：やってみよう、機械的代入

$$f(x) = 2x^2 + 7x + 3y - 4t + 5$$

x に「2」を代入すると $f(2) = 2 \times 2^2 + 7 \times 2 + 3y - 4t + 5$

$$= 8 + 14 + 3y - 4t + 5$$

$$= 27 + 3y - 4t$$

x に「3」を代入すると $f(3) = 2 \times 3^2 + 7 \times 3 + 3y - 4t + 5$

$$= 18 + 21 + 3y - 4t + 5$$

$$= 44 + 3y - 4t$$

x に「a」を代入すると $f(a) = 2a^2 + 7a + 3y - 4t + 5$

x に「$2x$」を代入すると $f(2x) = 2 \times (2x)^2 + 7 \times 2x + 3y - 4t + 5$

$$= 2 \times 4x^2 + 14x + 3y - 4t + 5$$

$$= 8x^2 + 14x + 3y - 4t + 5$$

練習問題：やってみよう、機械的代入

$$f(x) = \frac{1}{2}gx^2 + v_0 x$$

←こういう良くわからない数式でも
代入は機械的にできる！

x に「2」を代入すると $f(2) =$

x に「t」を代入すると $f(t) =$

x に「$x + \Delta x$」を代入すると $f(x + \Delta x) =$

練習問題：やってみよう、機械的代入

$$f(x) = \frac{1}{2}gx^2 + v_0 x$$

←こういう良くわからない数式でも
代入は機械的にできる！

x に「2」を代入すると $f(2) = \frac{1}{2}g \times 2^2 + v_0 \times 2$

$$= \frac{1}{2}g \times 4 + 2v_0 + 1 = 2g + 2v_0$$

x に「t」を代入すると $f(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

x に「$x + \Delta x$」を代入すると

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{2}g(x + \Delta x)^2 + v_0 \times (x + \Delta x)$$

$$= \frac{1}{2}g(x^2 + 2x \times \Delta x + (\Delta x)^2) + v_0 x + v_0 \Delta x$$

※$\Delta x \times x$はΔx^2ではない！

練習問題：やってみよう、機械的代入

２変数も一緒: $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy - 3$

x に1, yに2 を代入すると$f(1,2) =$

x に2, yに3 を代入すると$f(2,3) =$

xに$2x$, yに$3t$ を代入すると$f(2x,3t) =$

練習問題：やってみよう、機械的代入

２変数も一緒: $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy - 3$

x に1, yに2 を代入すると$f(1,2) = 2 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 2 \times 1 \times 2 - 3$

$$= 2 \times 1 + 3 \times 4 + 4 - 3$$

$$= 2 + 12 + 4 - 3 = 15$$

x に2, yに3 を代入すると$f(2,3) = 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 2 \times 2 \times 3 - 3$

$$= 2 \times 4 + 3 \times 9 + 12 - 3$$

$$= 8 + 27 + 12 - 3 = 44$$

xに$2x$, yに$3t$ を代入すると$f(2x,3t) = 2 \times (2x)^2 + 3 \times (3t)^2 + 2 \times 2x \times 3t - 3$

$$= 2 \times 4x^2 + 3 \times 9t^2 + 12xt - 3$$

$$= 8x^2 + 27t^2 + 12xt - 3$$

正解、不正解よりもプロセスを見ること！

コラム：その勉強は、「学習」になってますか？

勉強がデキない！と思い込んでいる人の多くは、
こんな勉強法をしています。

「問題を解く→採点→合ってたら喜ぶ、間違ってたら凹む→以上おわり」

これは、学習ではありません。
問題が解けたか解けていなかったかを単に確認する「作業」です。
作業は、慣れをつくりますが、学習は起きていません。

学習とは、こういうことです：
問題を解く。解答とプロセスの差を確認する。
自分の解法に固執せず、新しい観方を受け入れる。
何が理解できていなかったかを把握し修正する。質問する。
自分でプロセスを再現できるようになるまでやる。

自由自在 1次函数

ここからは、1次函数(linear function)を取り扱います。

「1次函数を学ぶ」のではなく
「函数を、一番シンプルな1次関数で学ぶ」と理解してください。

1次函数の公式を暗記することではなく、
函数を理解することを、この節の目的としています。

「1次」とは、$f(x) = ax + b$ のような xの函数がある時、
xが1次式(x)である函数を言います。
同様に「2次函数(quadratic function)」は
$f(x) = ax^2 + bx + c$ のようにxが2次(x^2)の函数を言います。

自由自在 １次函数

「理解」には、幾つかのレベルがあります。

「聴いたことがある」
「知っている」
「計算できる」
「意味がわかる」
「説明できる」
「自由自在に扱える」

はじめ、中学生で習う１次函数(１次関数)ですが、
ほんとうに「誰かに説明できますか」「自由自在に扱えますか」

ここからは、１次関数を自由自在に扱えるようになって貰います。

自由自在 1次函数

学習目標：
１次函数について「自由自在に扱える」ということは、
例えば以下のような事ができるはずです。

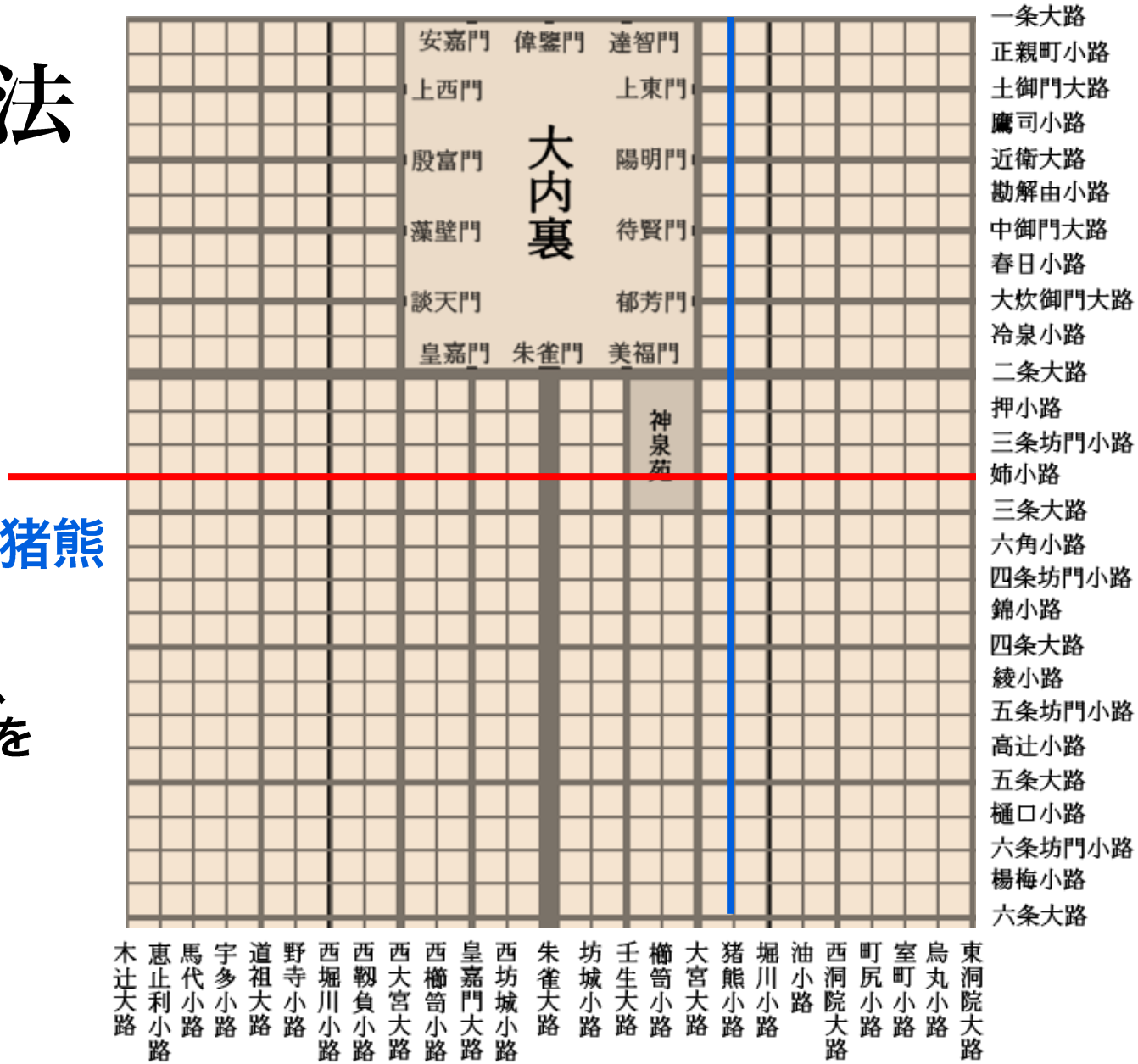
□１次函数を$f(x) = ax + b$と置いた時、 a, bの意味が説明できる
□１次函数$f(x)$の図が描ける
□２つの点(x_1, y_1), (x_2, y_2)を通る直線を式で書ける
□$x - y$平面上で直線を定義する方法がわかる
□１次函数を$f(x)$を上下左右に移動させるには、数式として
　どうしたらよいかわかる
□１次函数$f(x)$と$f(x - A)$の関係がわかる
□１次函数$f(x)$と$f(-x)$の関係がわかる
□１次函数$f(x)$と$f(2x)$の関係がわかる

全てができる人は、飛ばして次の章に進むことが出来ます。

座標:世界の全てを明確に表現するには

世界の中で「位置」を、明確に、誤解なく、
表現するには、どうしたらいいでしょうか？

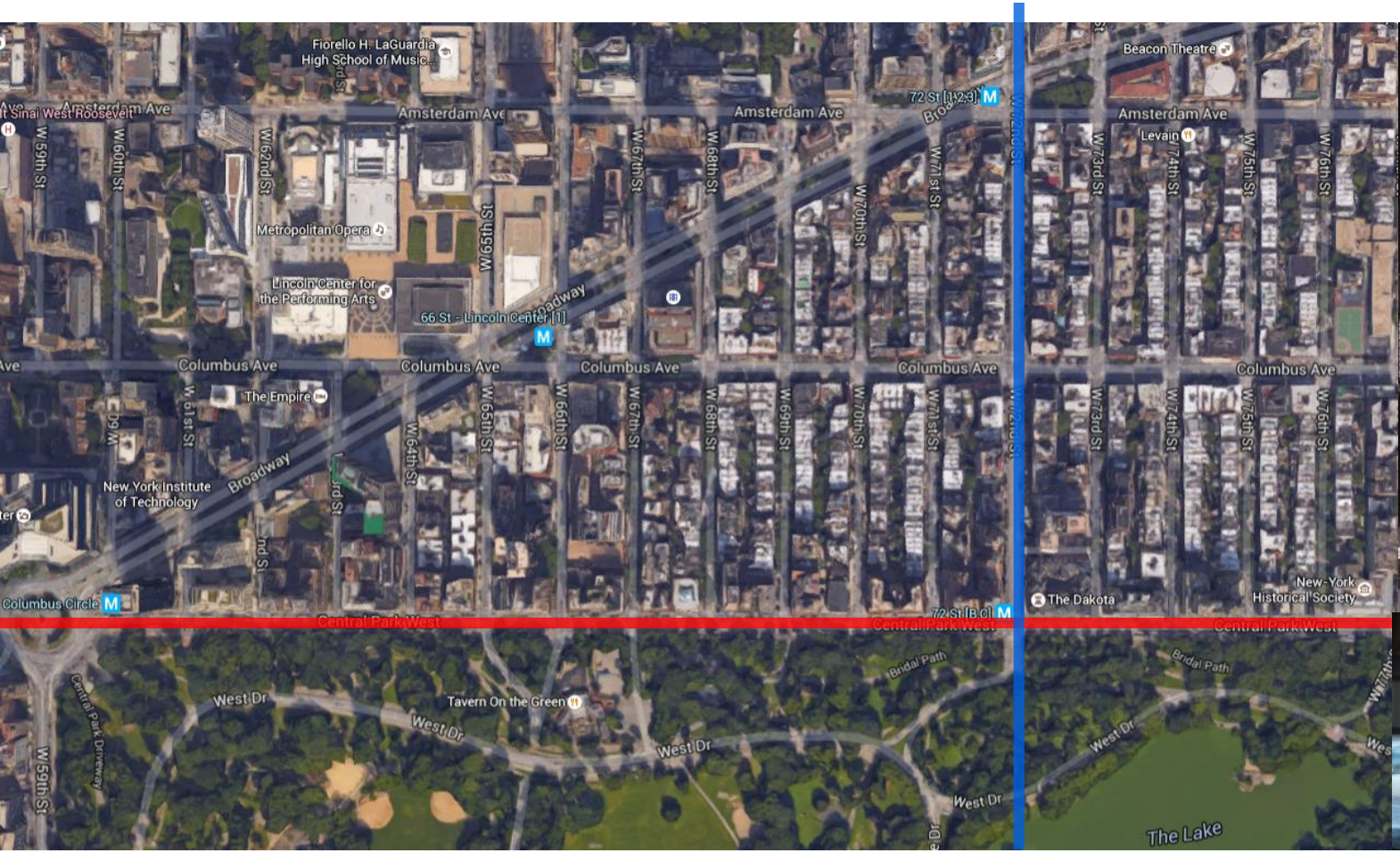
座標:京都の方法



姉小路通猪熊

街を路で格子状に区切って、
通りの名前がクロスする所を
表現した。

座標:アメリカの方法

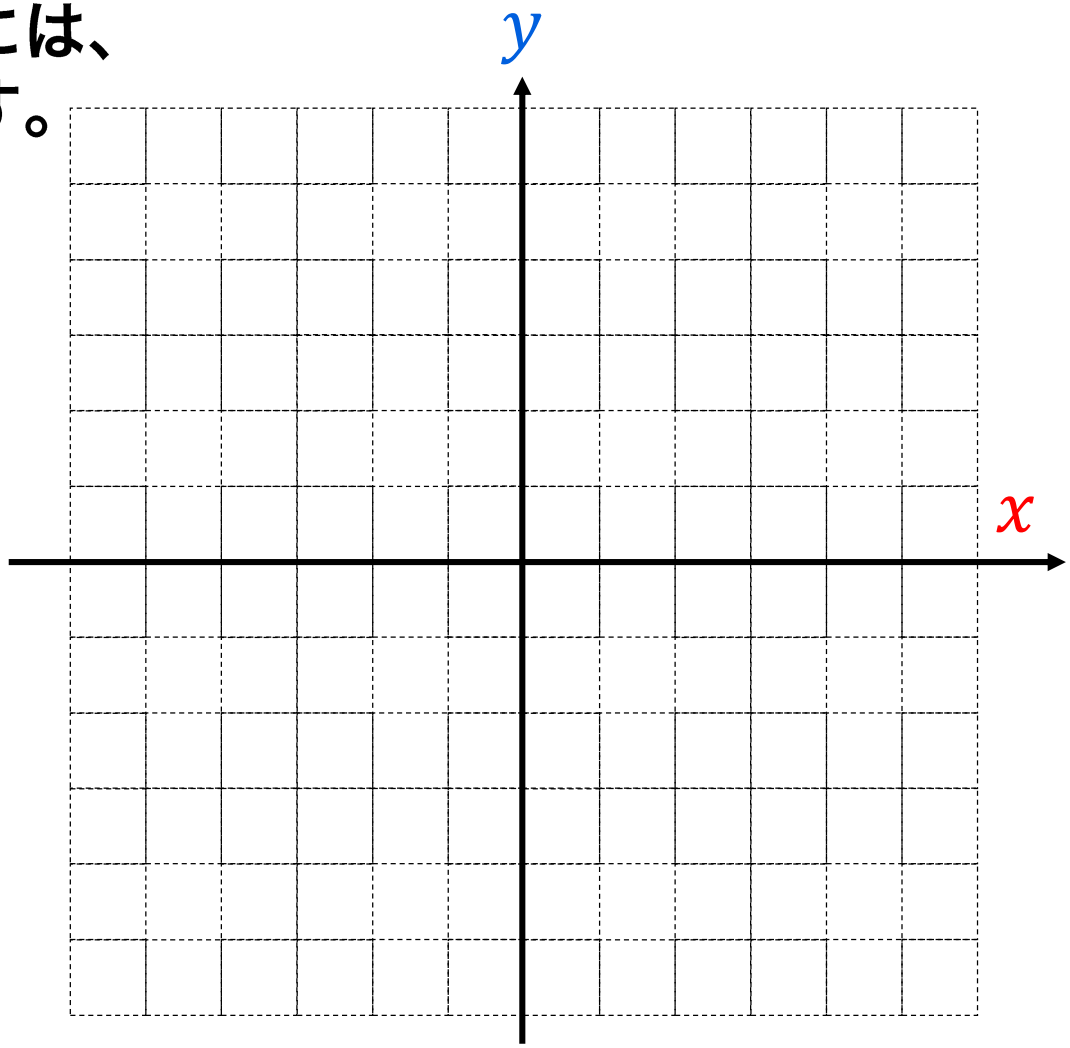


John Lennonが撃たれたのは、Central Park West at 72th streetでした。

座標:世界の全てを明確に表現するには

世界の全てを、明確に表現するには、
格子で区切ってやればいいのです。
これを「直交座標」と言います。

横軸の名前をx
縦軸の名前をy
のように「決めた」時
この平面をxy平面と呼びます。

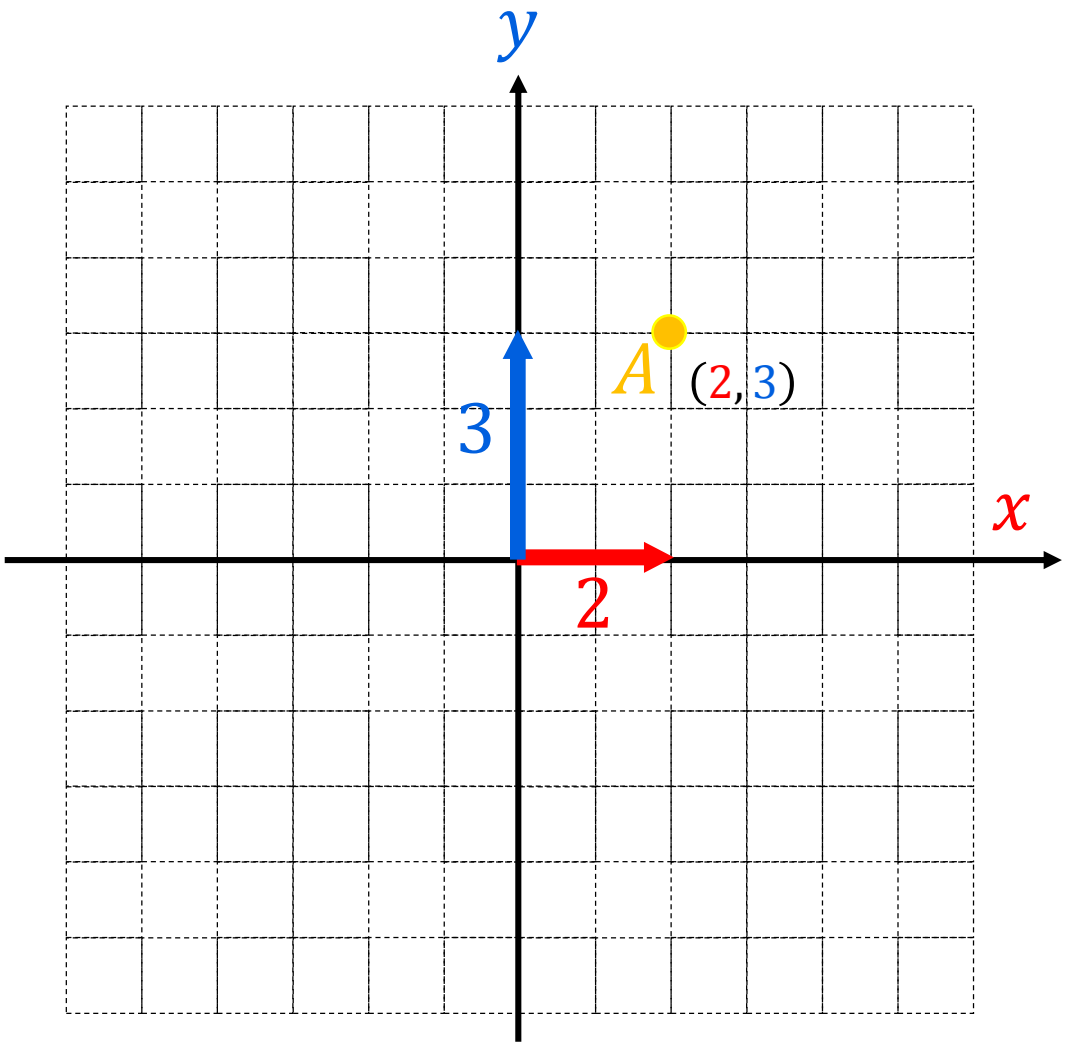


座標:世界の全てを明確に表現するには

このxy平面では、

(x, y)の数の組を定めることで、
平面上の点の位置を特定する
ことができます。

例えば右の図では、
点Aは(2, 3)で表現できます。



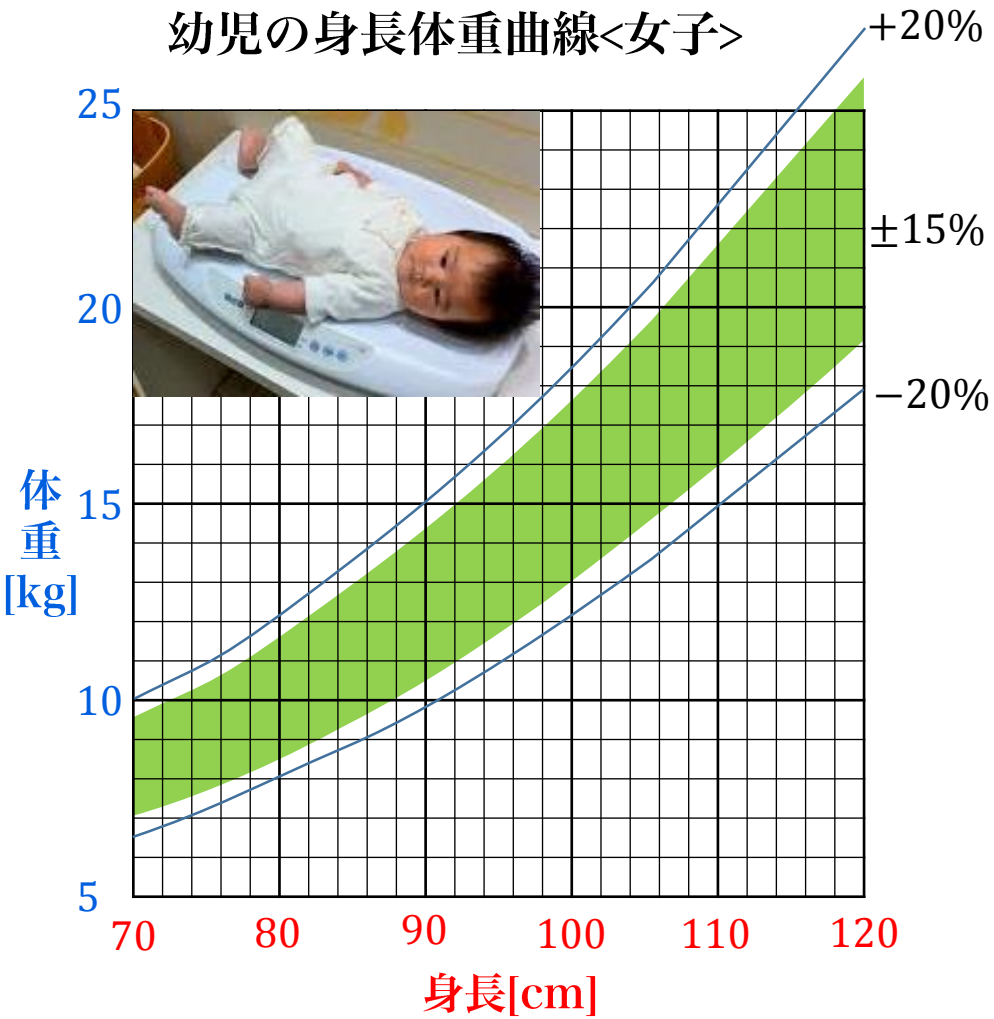
これといっしょです。
(姉小路通, 猪熊)
(Central Park West, 72th street)

数学の抽象性と現実への応用

数学では、このxyに「単位」はついていません。

だから、このxy平面は「地図」や「長さ」以外にも使うことが出来ます。

右の「身長 – 体重平面」は、
xに身長
yに体重
を取ることで、子供の発育がわかるグラフです。



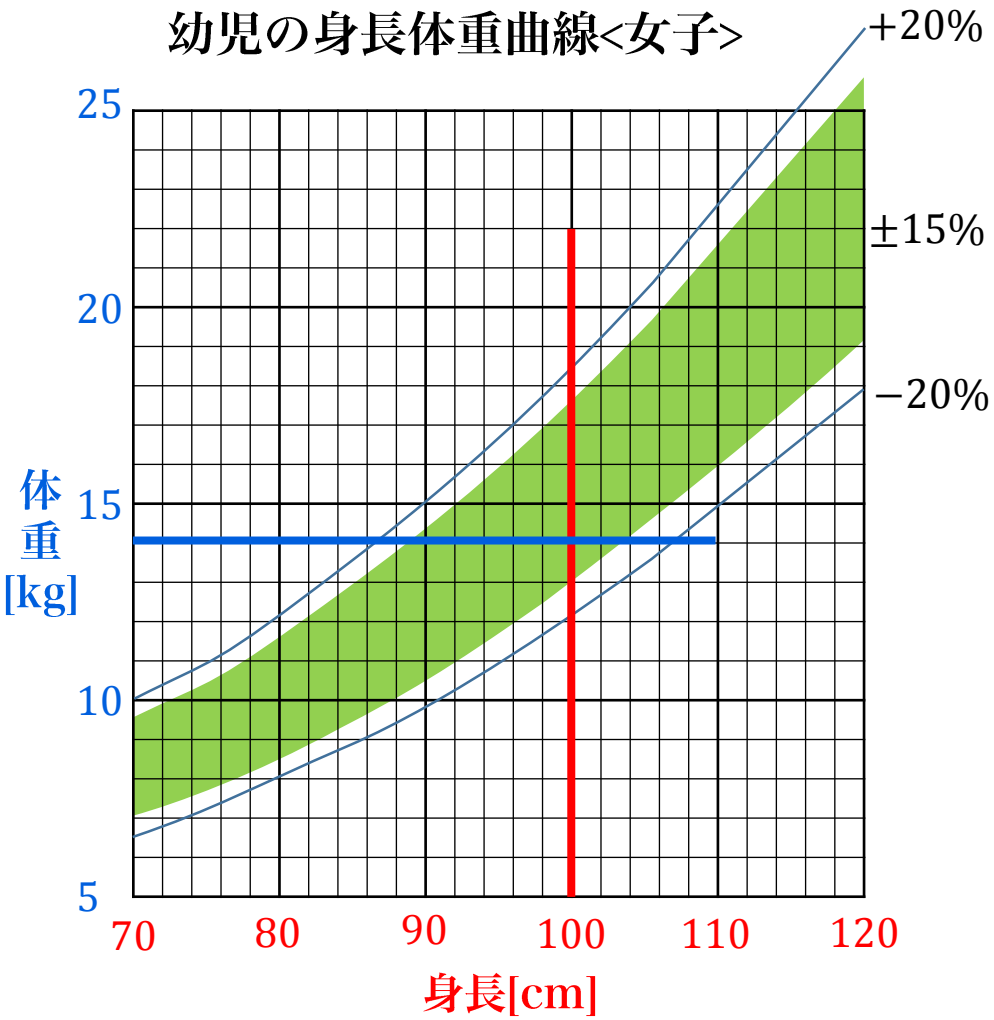
数学の抽象性と現実への応用

例えば、お子さんの

$$(x, y) = (\text{身長}, \text{体重})$$
$$= (100[cm], 14[kg])$$

だったとします。

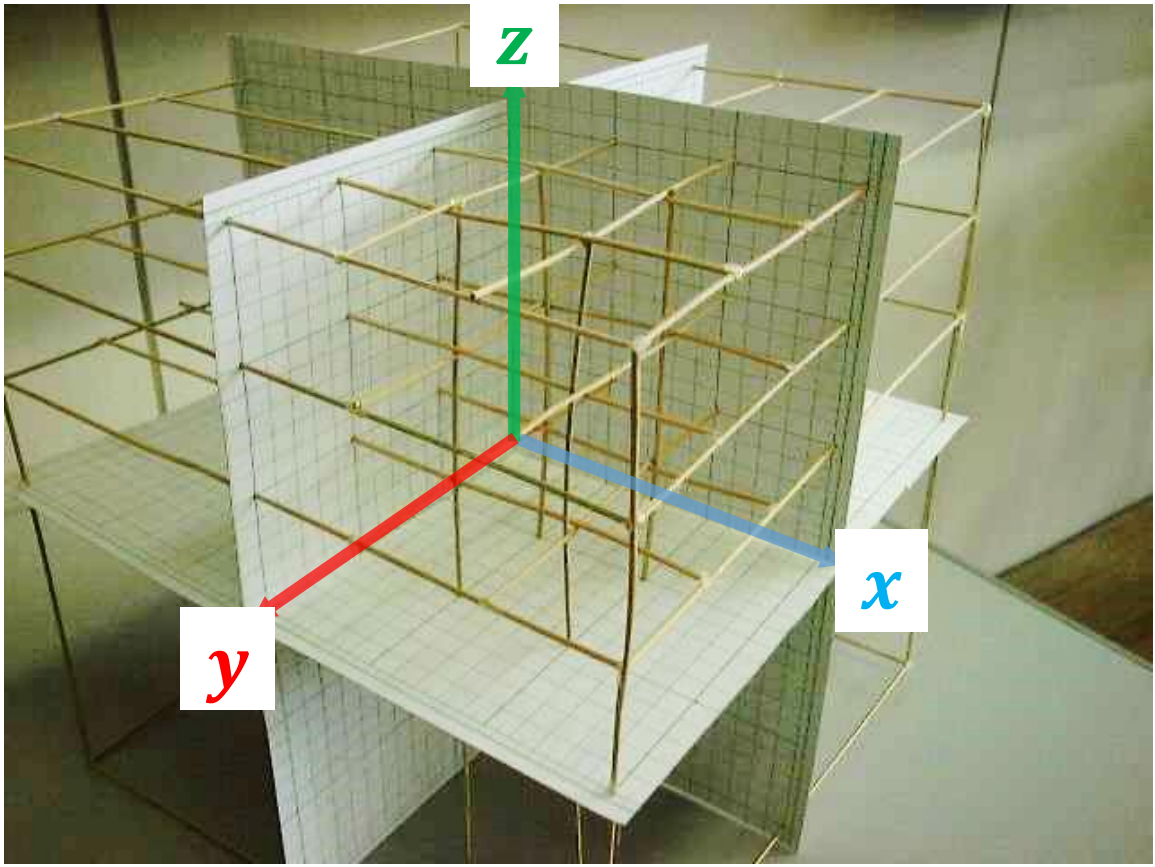
そうすると、交点が緑の枠内に入っているので、
どうやら肥満でもヤセすぎでもなさそうだとわかります。



座標:世界の全てを明確に表現するには

では、3次元ではどうでしょうか。

3次元空間座標(x, y, z)で
表現します。



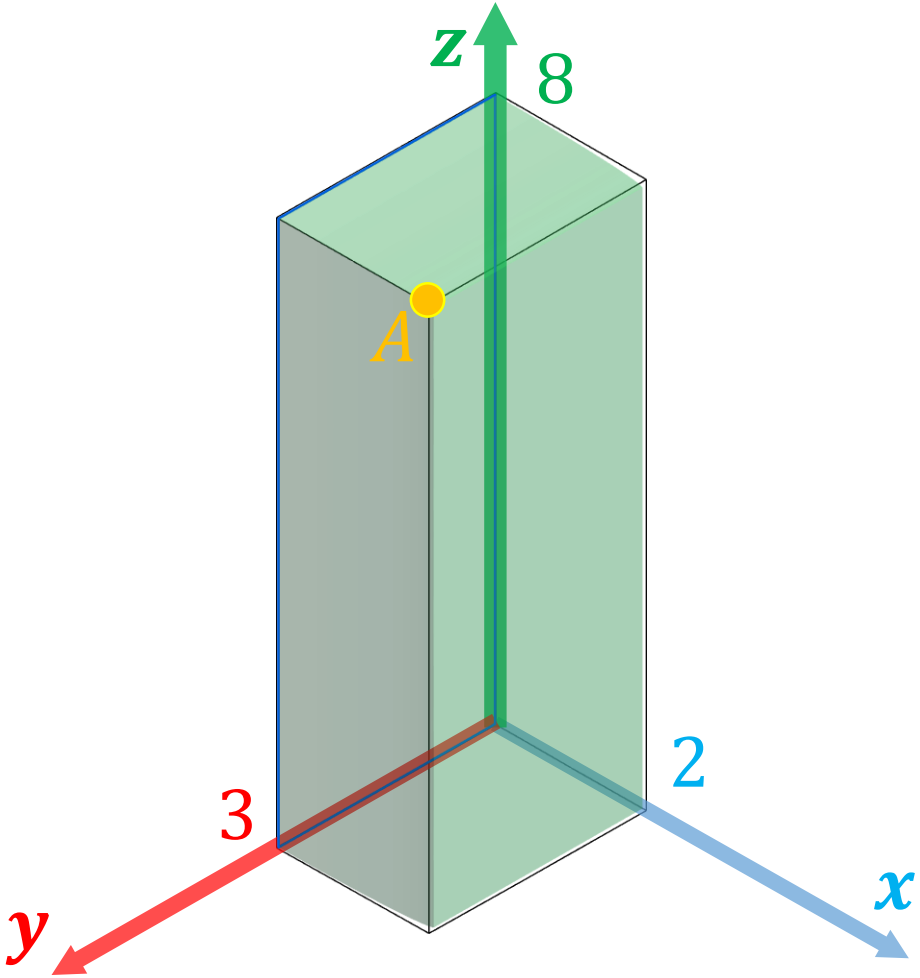
http://www25.tok2.com/home/toretate/d000928.html

座標:世界の全てを明確に表現するには

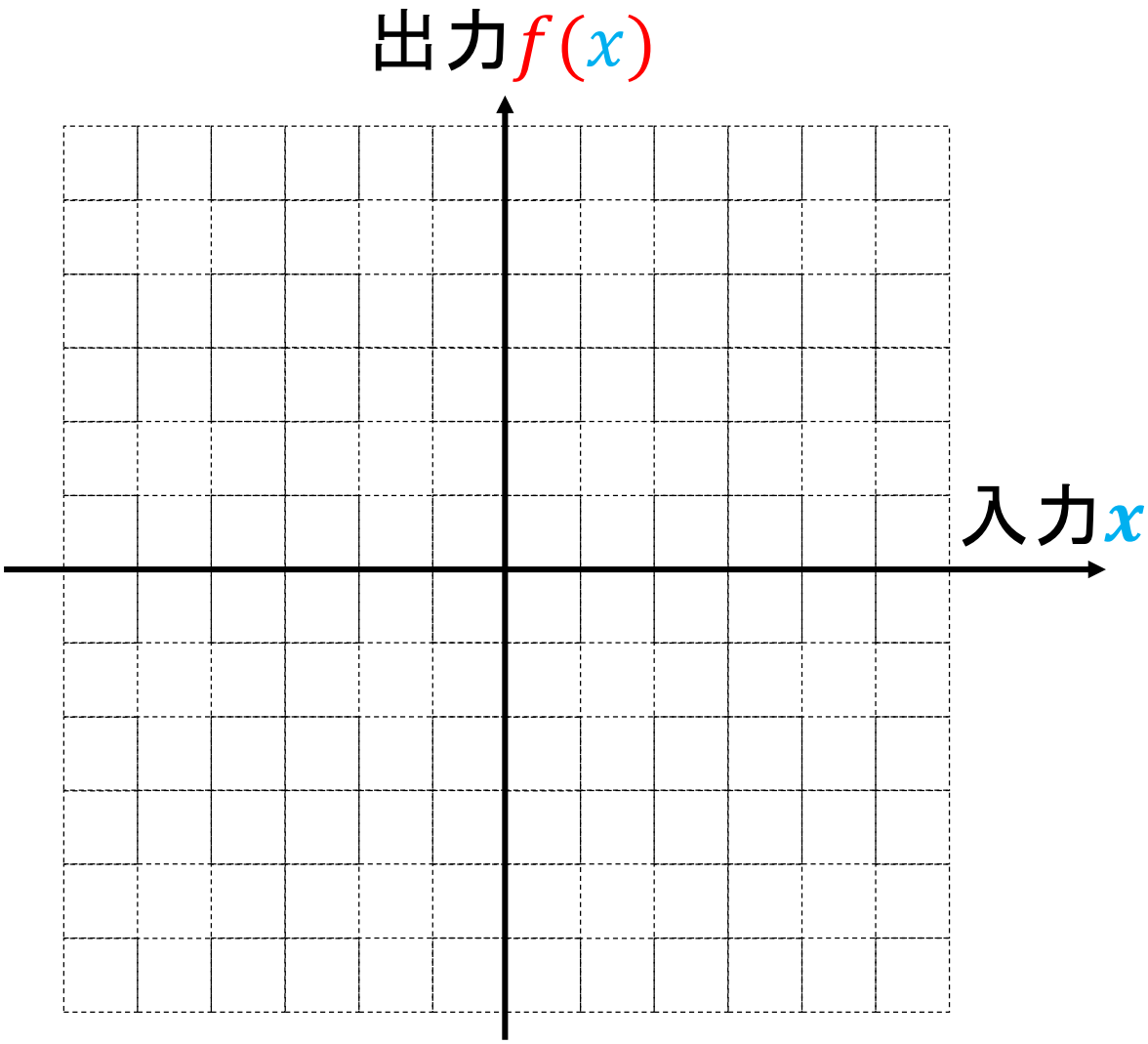
では、3次元ではどうでしょうか。

3次元空間座標(x, y, z)で
表現します。

右図の点Aは $(2,3,8)$と表現できます。



ちゃんとわかる函数/関数

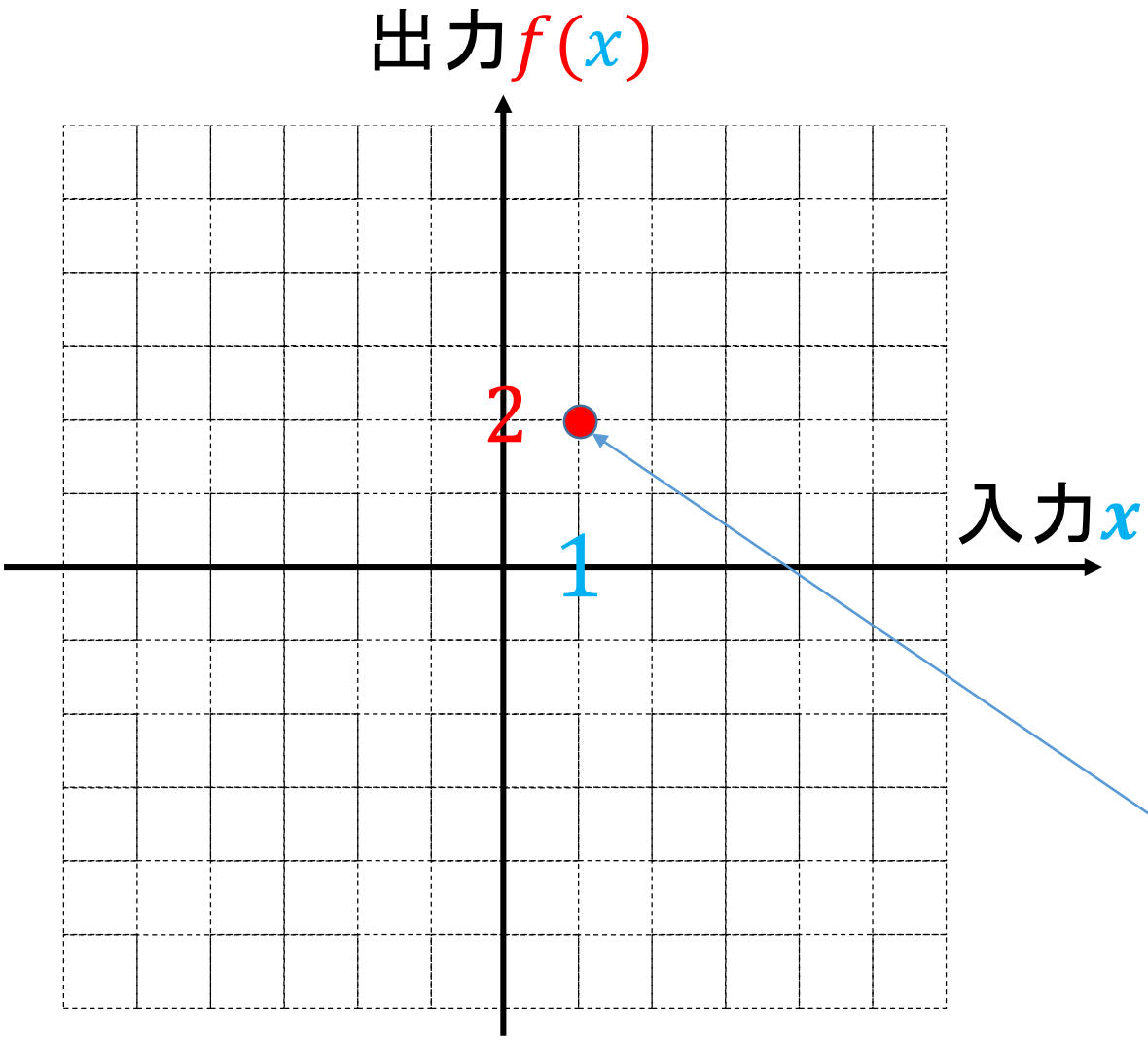


この関数の、入力xと
出力$f(x)$の関係を、
図示すると
どうなるでしょうか？

$$f(x) = 2x$$

函数の図示とは、単に
入力xと出力$f(x)$の関係を、
図示したもの！
という観方はアタマに
入れておこう

函数の可視化(図示)



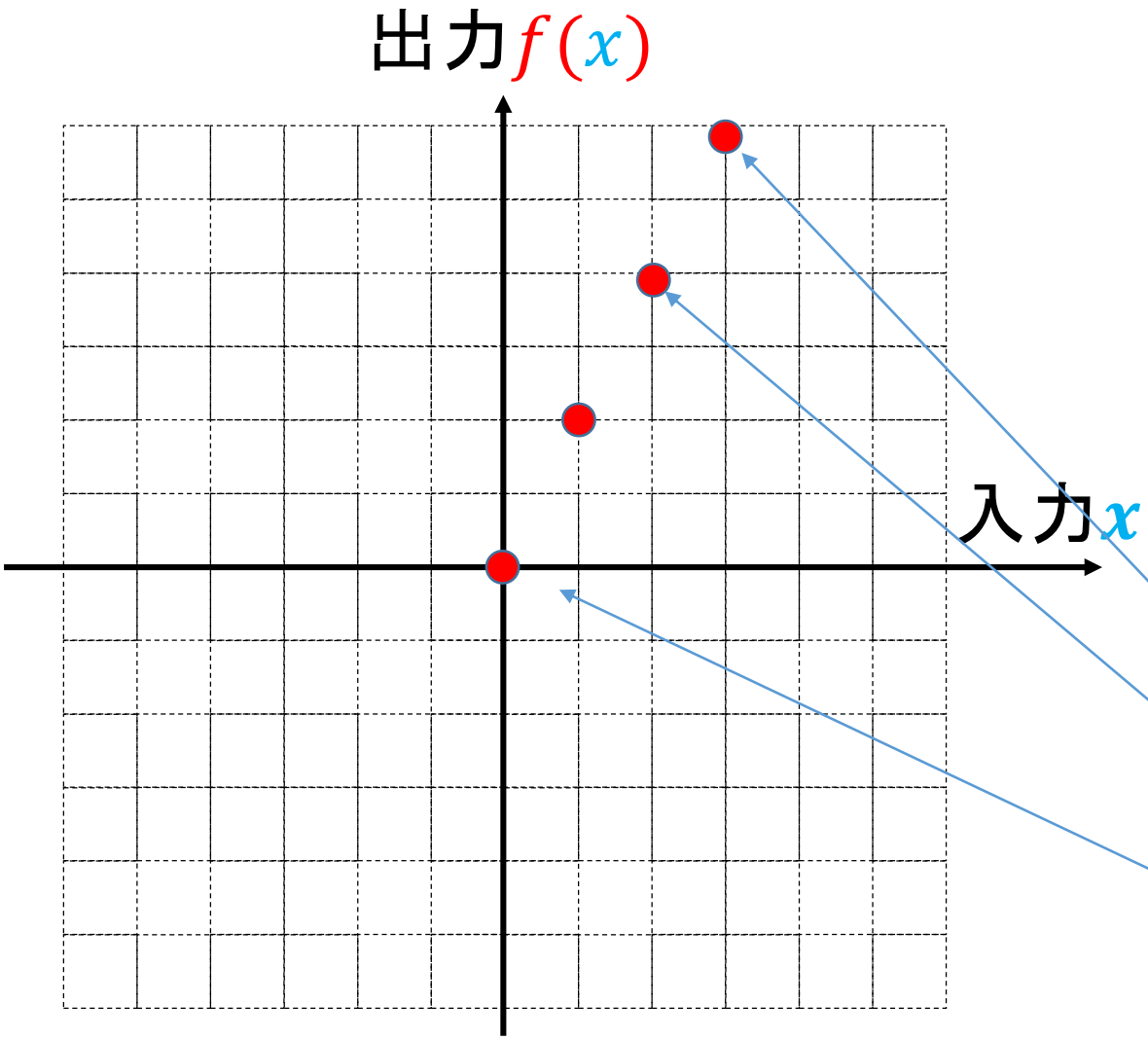
この関数の、入力xと
出力$f(x)$の関係を、
図示すると
どうなるでしょうか？

$$f(x) = 2x$$

考え方：
実際代入をやってみたらいいよね！

$$f(1) = 2$$

函数の可視化(図示)



この関数の、入力xと出力$f(x)$の関係を、図示するとどうなるでしょうか？

$$f(x) = 2x$$

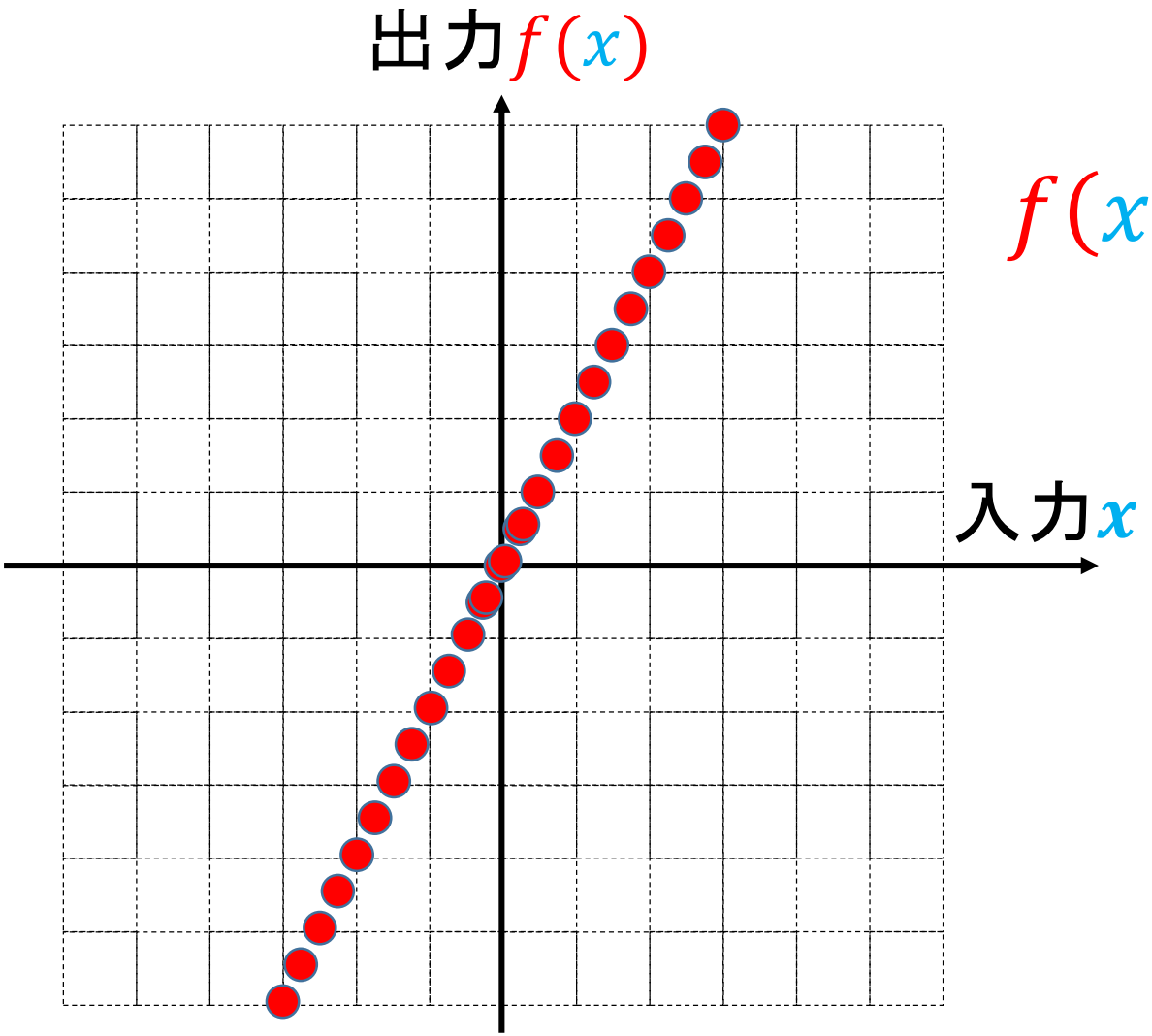
実際やってみたらいいよね！

$f(3) = 6$

$f(2) = 4$

$f(0) = 0$

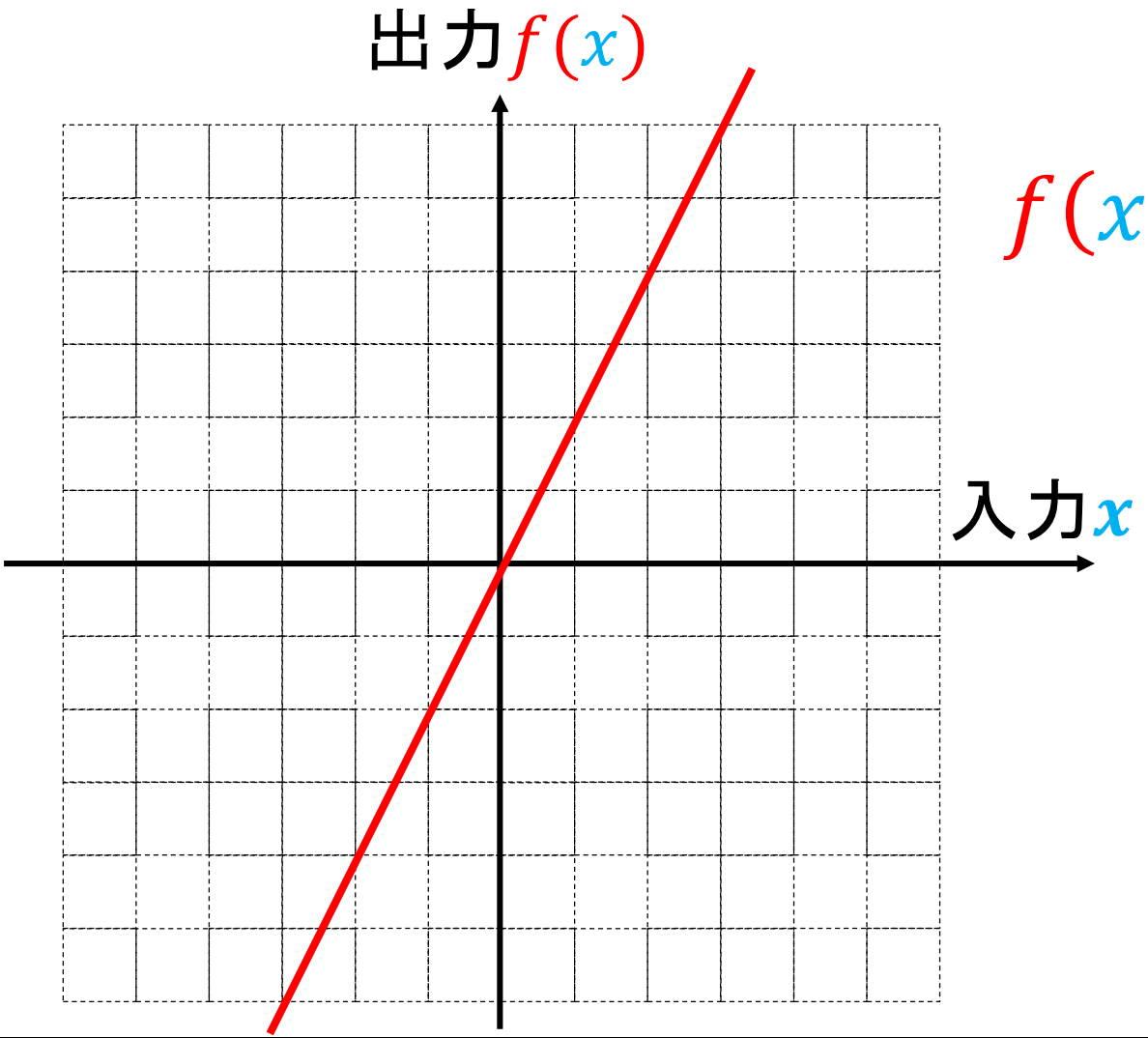
函数の可視化(図示)



$$f(x) = 2x$$

超いっぱいやるとこうなる

函数の可視化(図示)



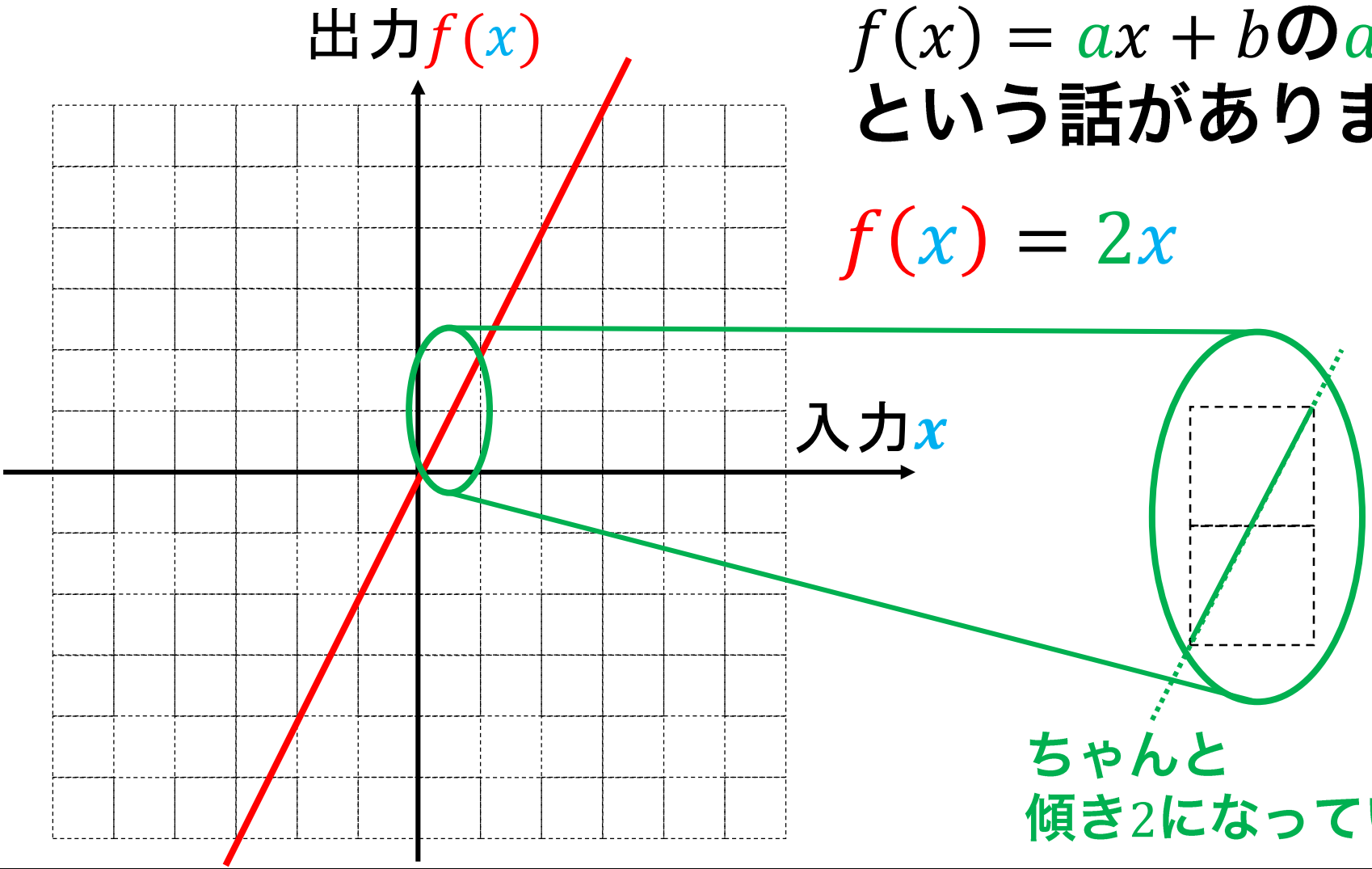
$$f(x) = 2x$$

「いっぱい点を打つの大変なので
線で表現することにしました。」

ということが、
函数を線で図示する「意味」。

コンピュータでグラフ書く時は
実際、xの値を0.01刻みで変えて
いってガンガン計算させて
グラフを書きます。

函数の可視化(図示)

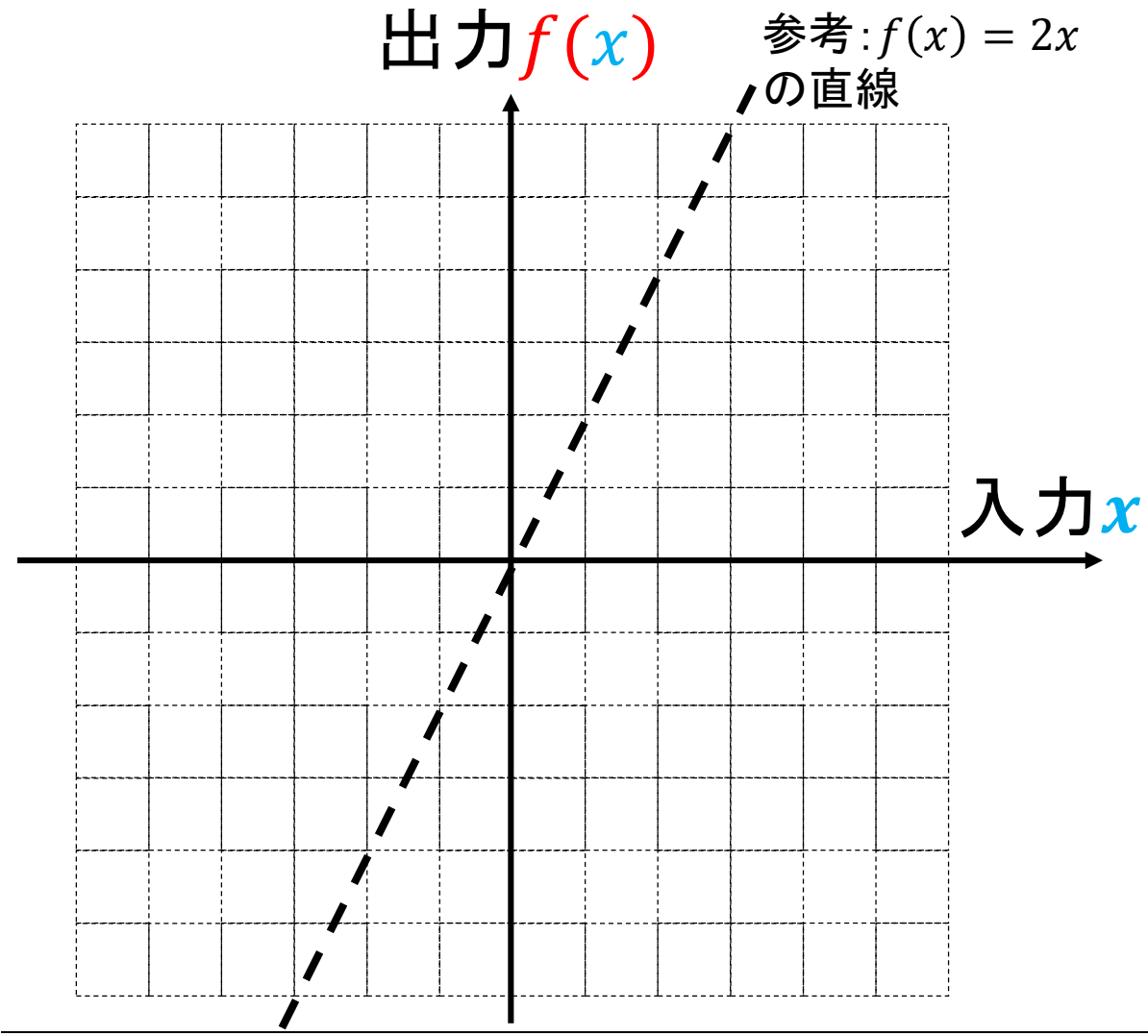


$f(x) = ax + b$のaが傾き
という話がありましたが、

$f(x) = 2x$

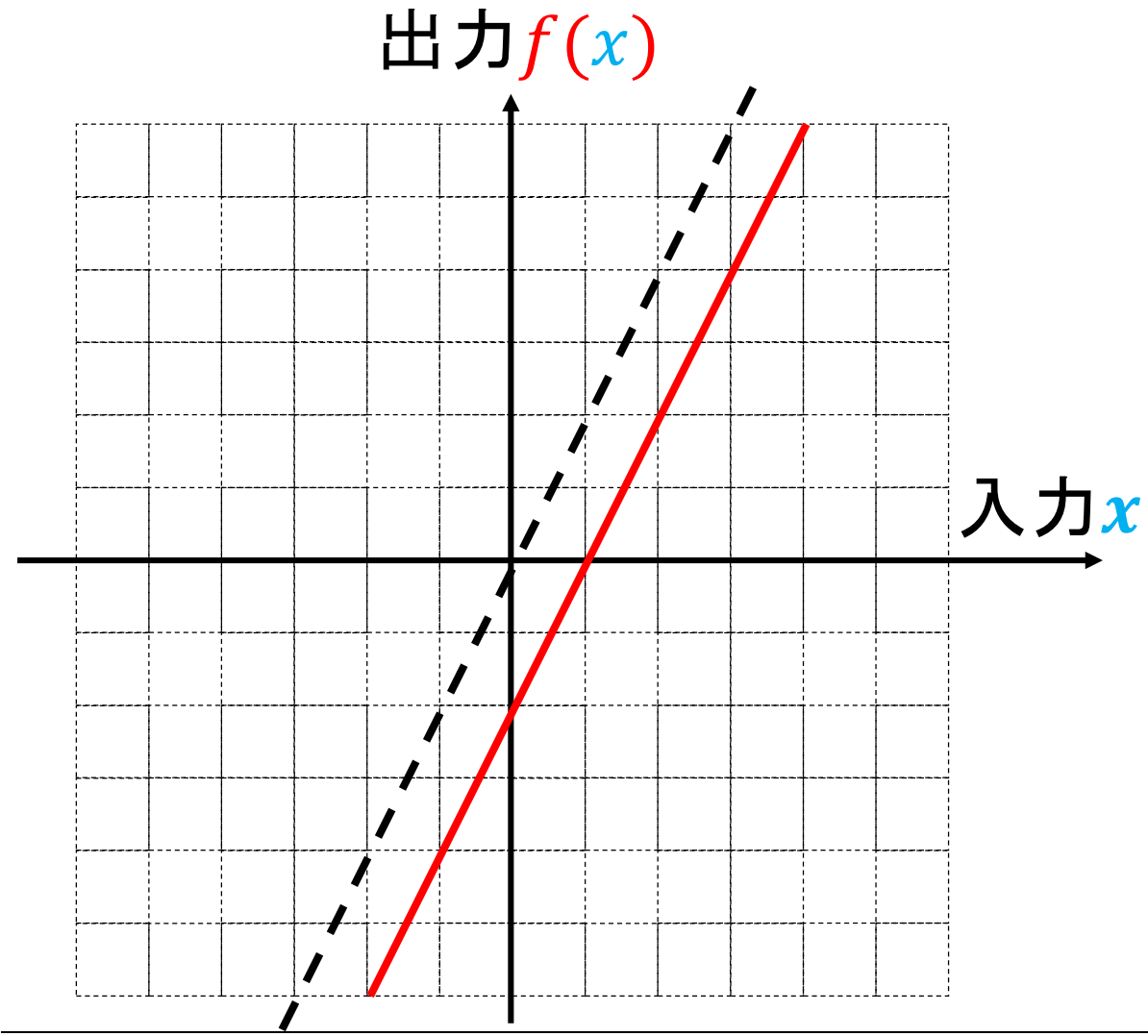
ちゃんと
傾き2になっている！

練習問題：函数の可視化(図示)



$$f(x) = 2x - 2$$

解答：函数の可視化(図示)



$$f(x) = 2x - 2$$

$$f(0) = -2$$

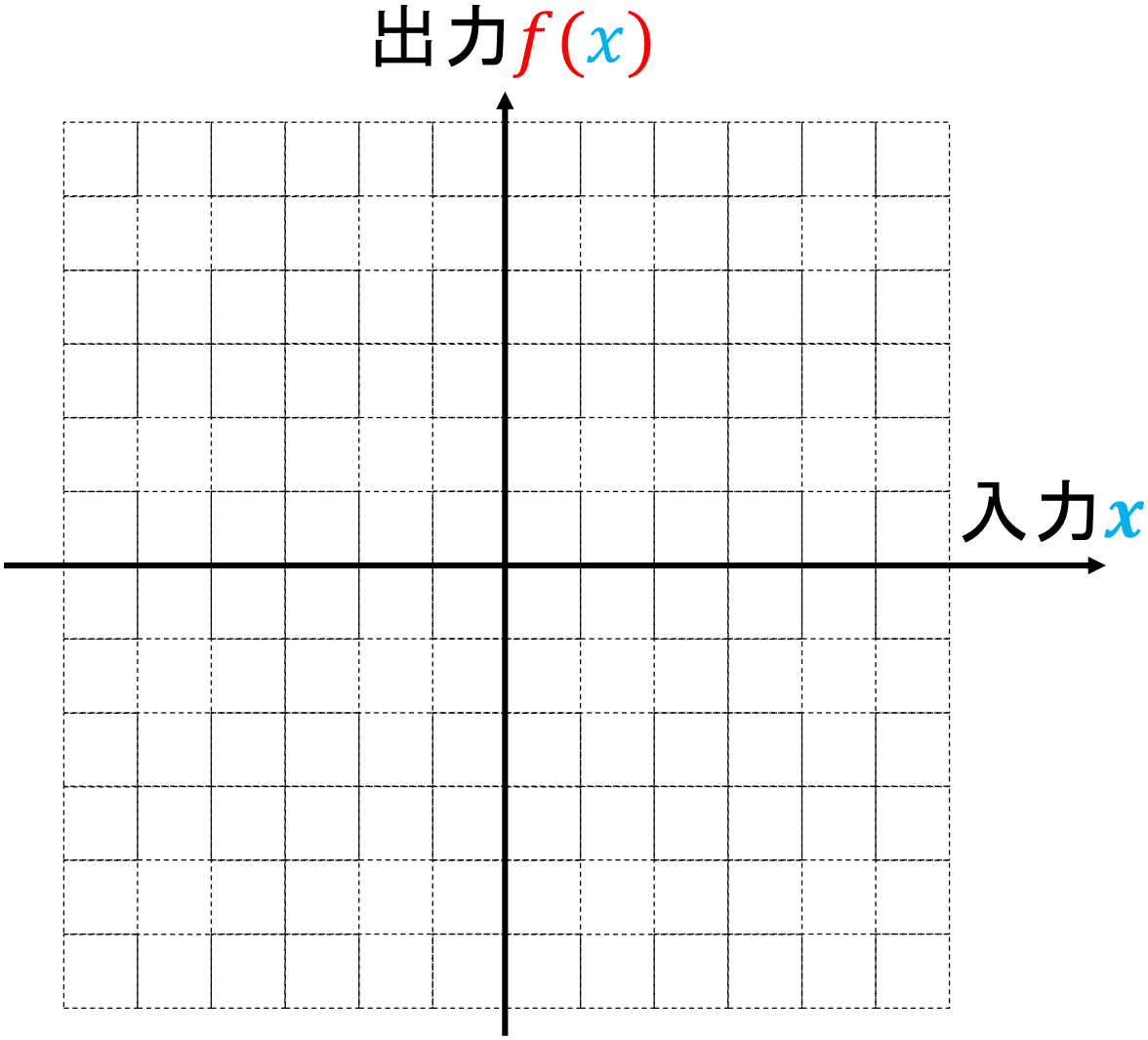
$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 2$$

$$f(-1) = -4$$

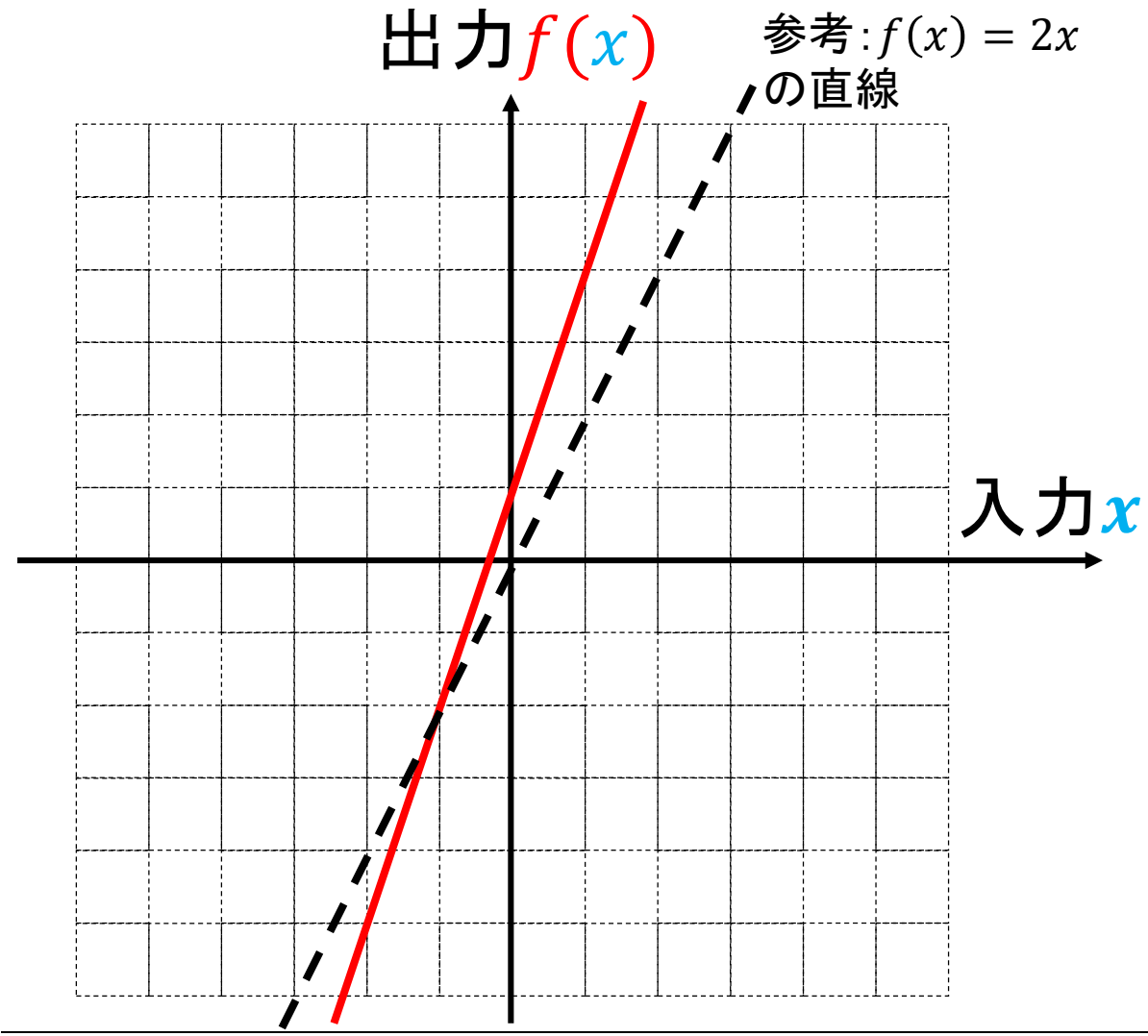
$$f(-2) = -6$$

練習問題：函数の可視化(図示)



$$f(x) = 3x + 1$$

解答：函数の可視化(図示)



$$f(x) = 3x + 1$$

$$f(0) = 1$$

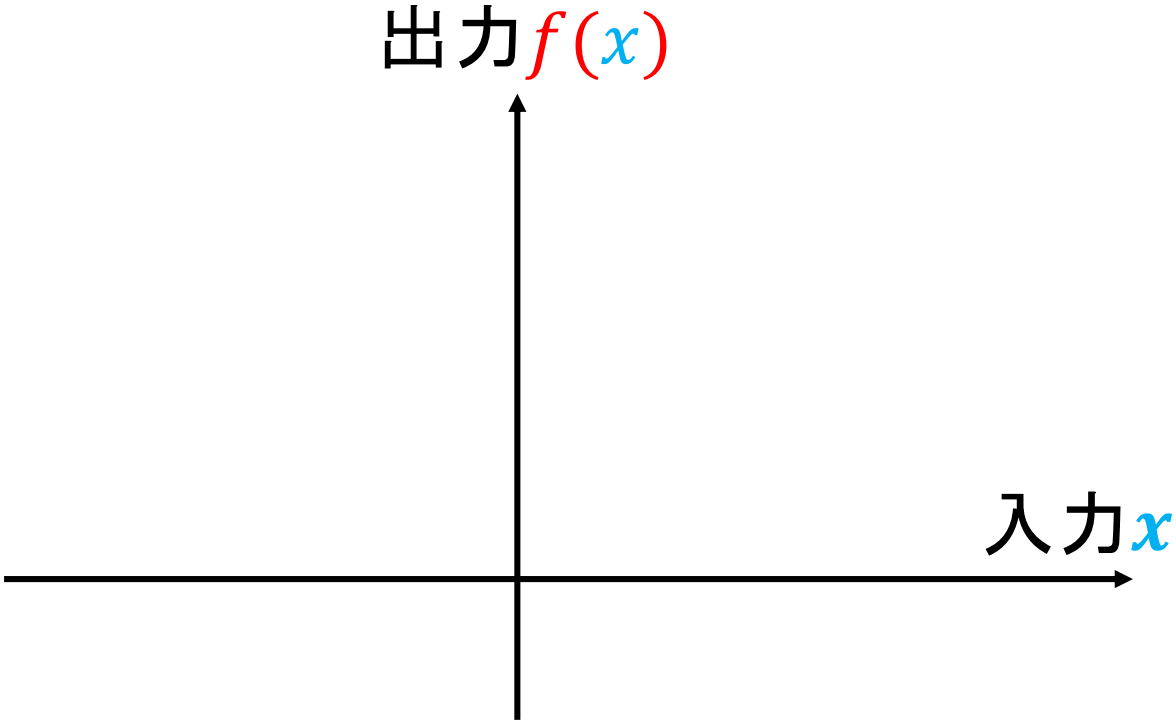
$$f(1) = 4$$

$$f(2) = 7$$

$$f(-1) = -2$$

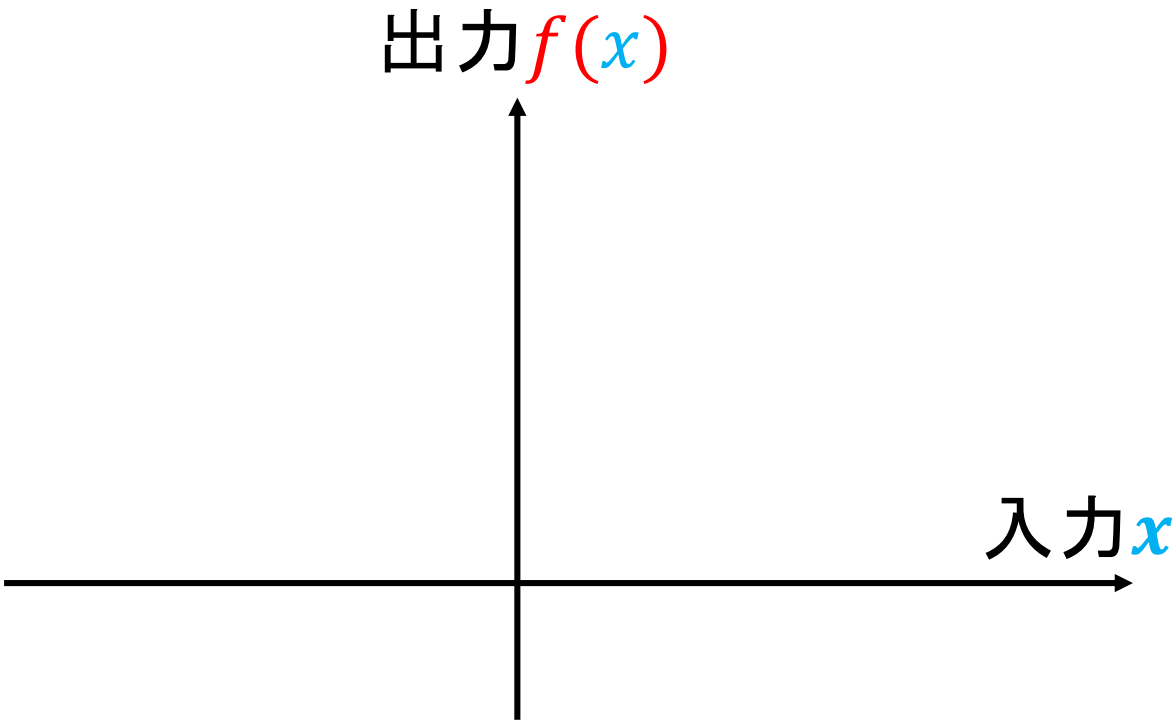
$$f(-2) = -5$$

練習問題：函数の可視化(図示)してみよう



$$f(x) = ax + b$$

練習問題ヒント：函数の可視化(図示)



わからなくなったら「代入」しよう

$$f(x) = ax + b$$

$$f(0) =$$

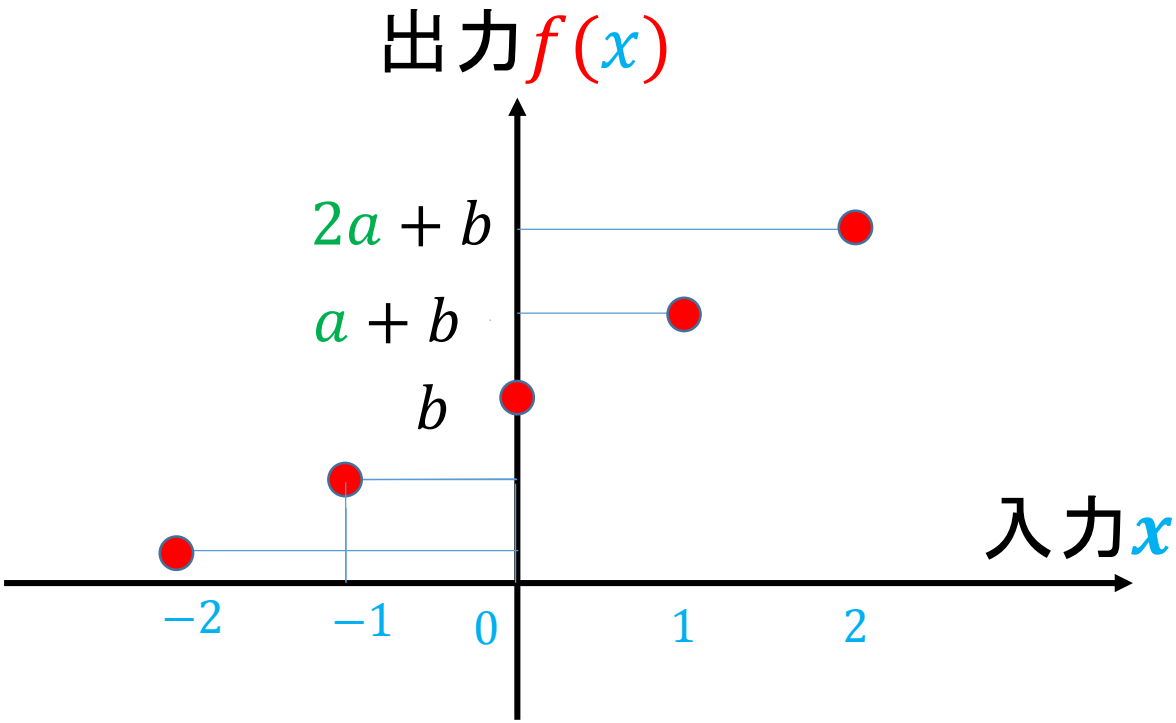
$$f(1) =$$

$$f(2) =$$

$$f(-1) =$$

$$f(-2) =$$

解答：函数の可視化(図示)



$$f(x) = ax + b$$

$$f(0) = b$$

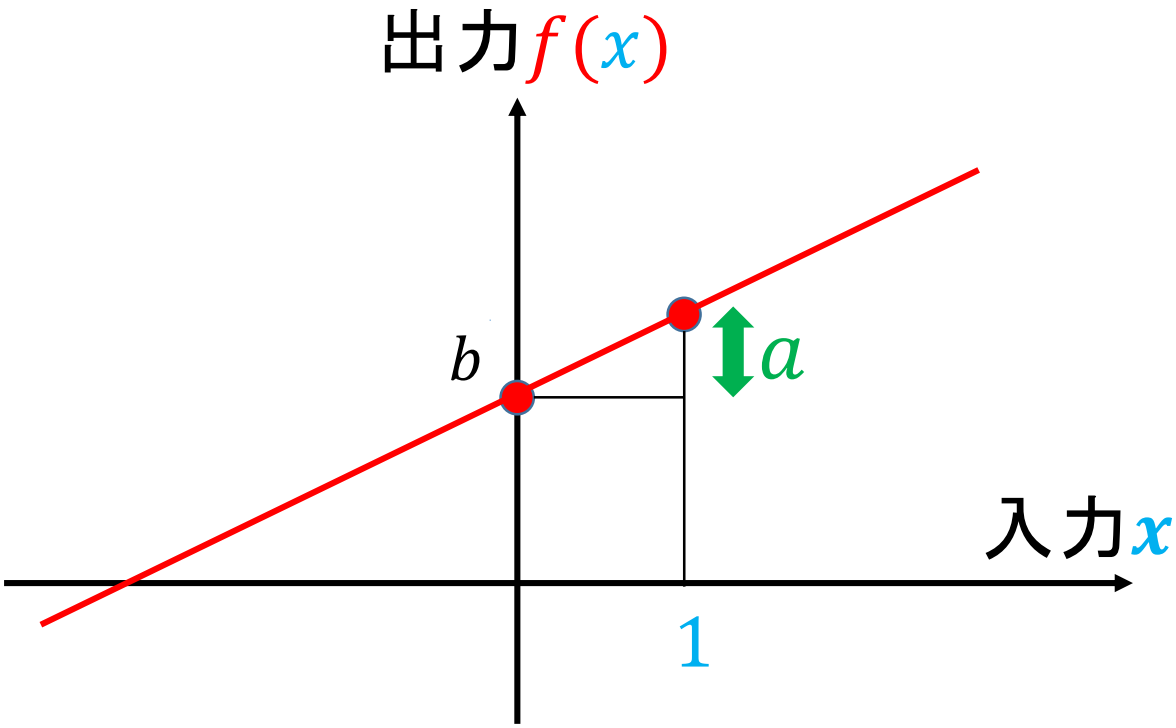
$$f(1) = a + b$$

$$f(2) = 2a + b$$

$$f(-1) = -a + b$$

$$f(-2) = -2a + b$$

解答：函数の可視化(図示)

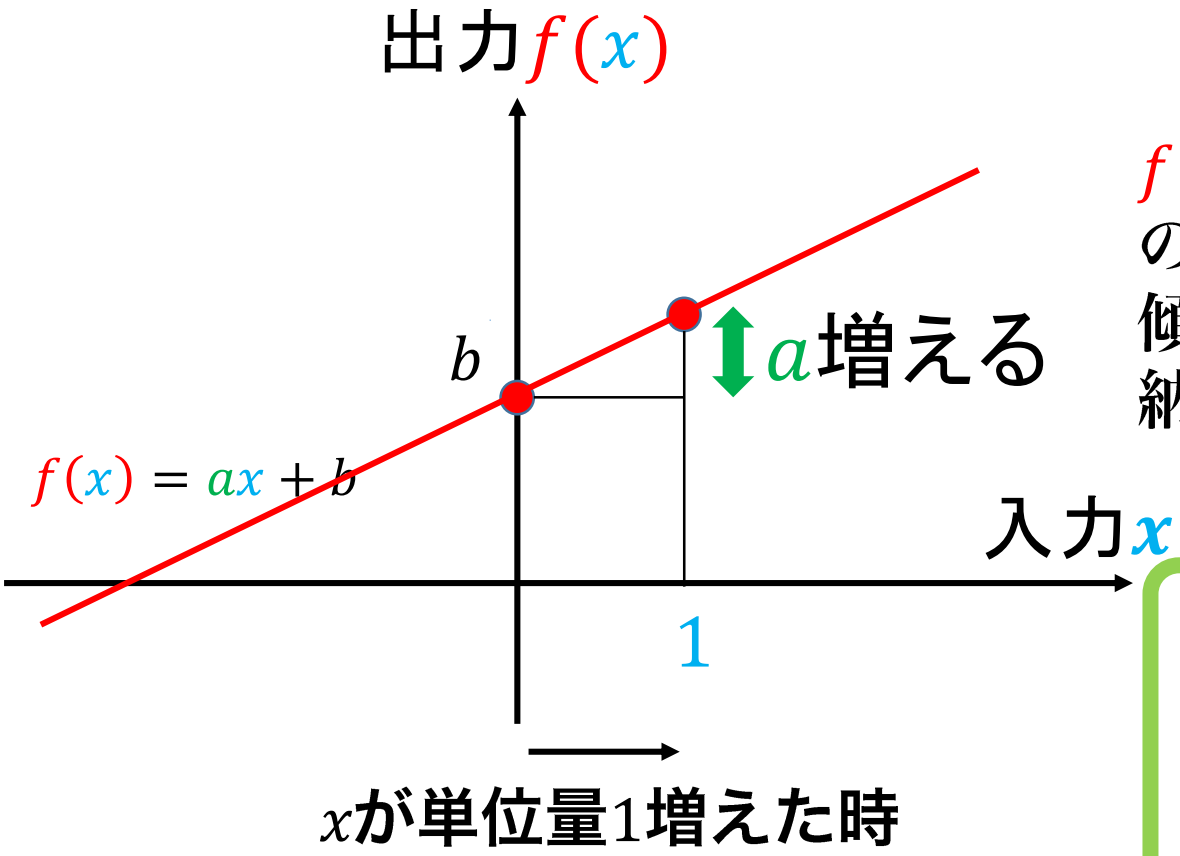


$$f(x) = ax + b$$

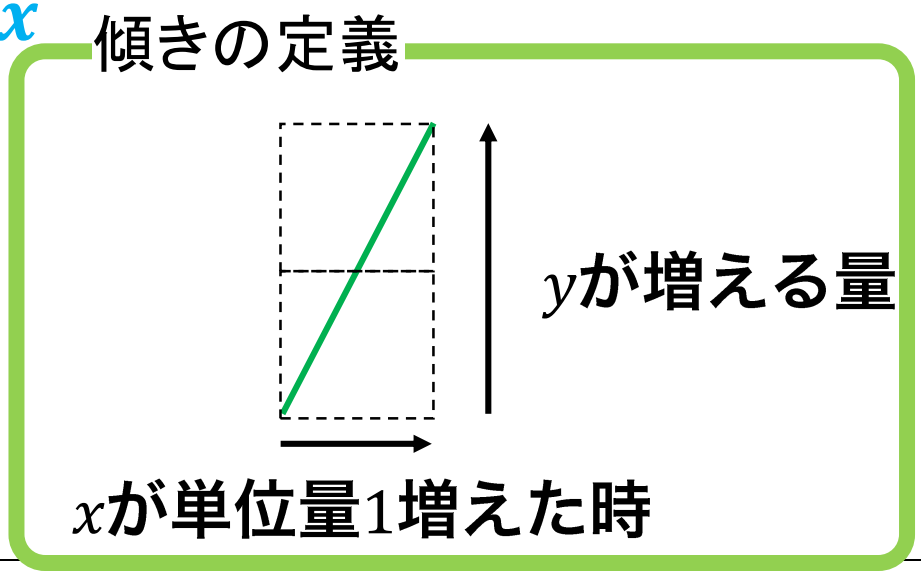
$$f(0) = \qquad b$$

$$f(1) = a \quad + b$$

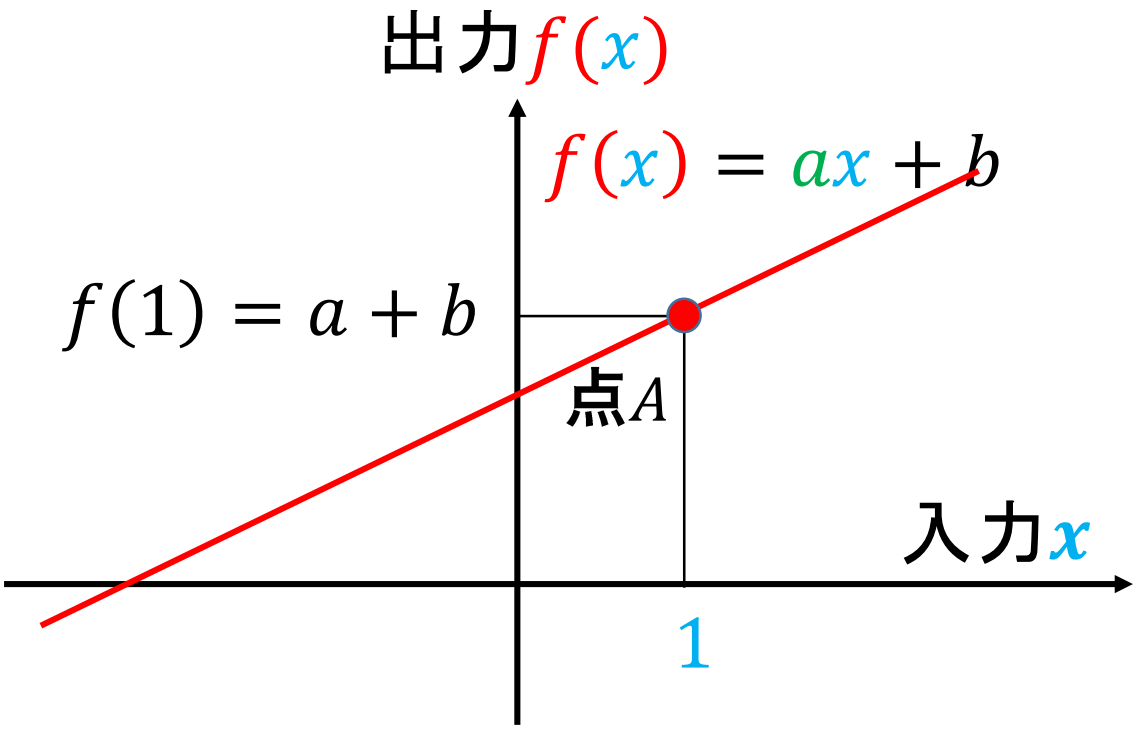
傾きaの意味



$f(x) = ax + b$
の式の傾きが「a」というのは、
傾きの定義からすると、
納得できると思います



（参考・確認）座標の表示方法



$f(x) = ax + b$という函数に
$x = 1$を代入した時、

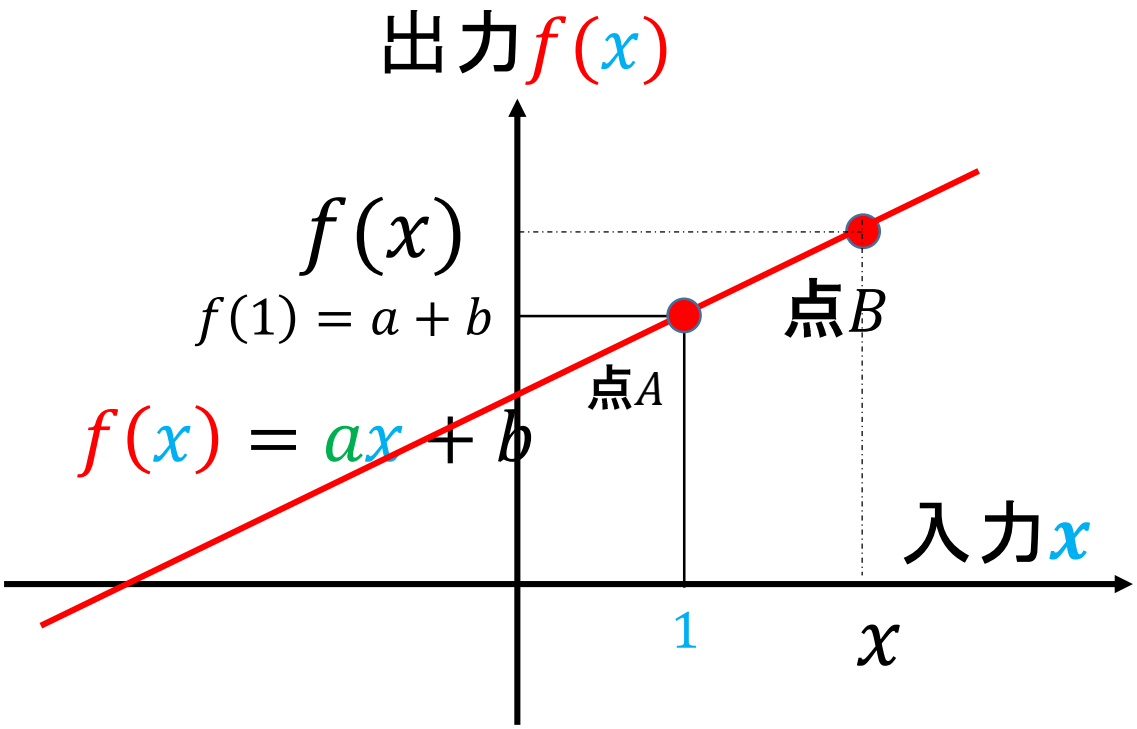
$$f(1) = a + b$$

となるような点Aを
$(x, y) = (0,2)$のような
座標で表示すると
どうなるでしょうか？

$$(x, y) = (1, a + b)$$

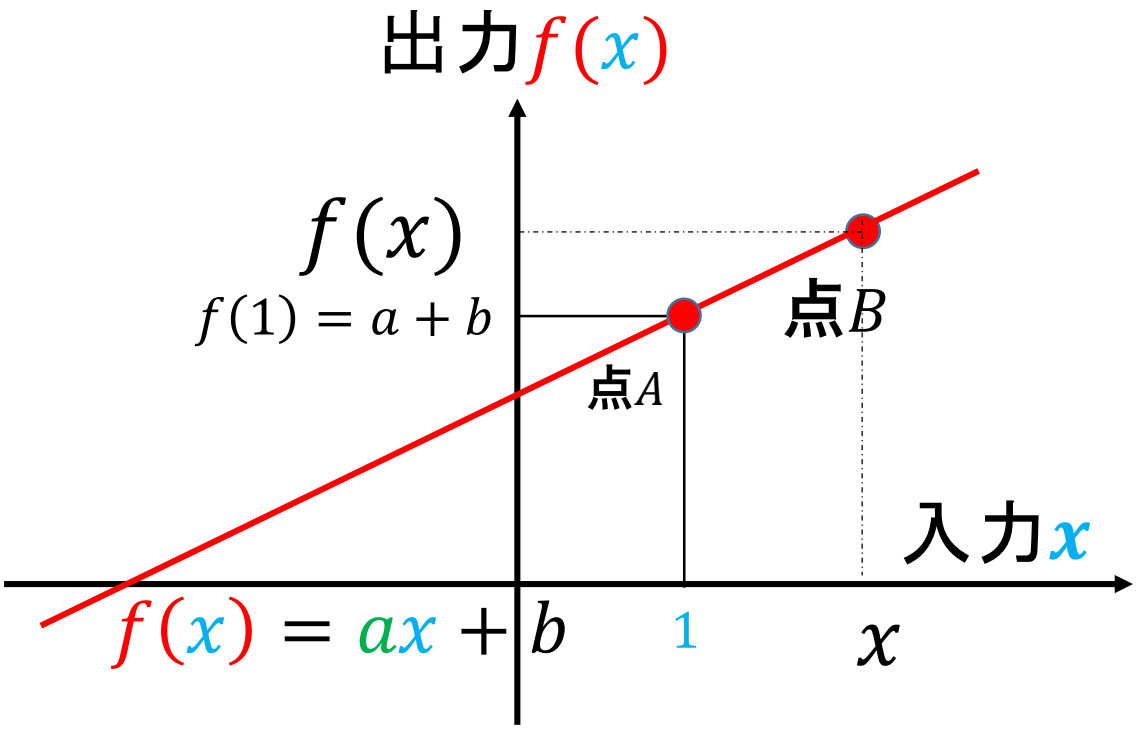
のようになるはずです。

（参考・確認）座標の表示方法



では、同じように
$f(x) = ax + b$という函数に
$x = x$を代入した時、
点Bを$(x, y) = (0,2)$の
ような座標で表示すると
どうなるでしょうか？

（参考・確認）座標の表示方法



では、同じように
$f(x) = ax + b$という函数に
$x = x$を代入した時、
点Bを$(x, y) = (0,2)$の
ような座標で表示すると
どうなるでしょうか？

$$点B(x, y) = (x, ax + b)$$

もしくは

$$点B(x, y) = (x, f(x))$$

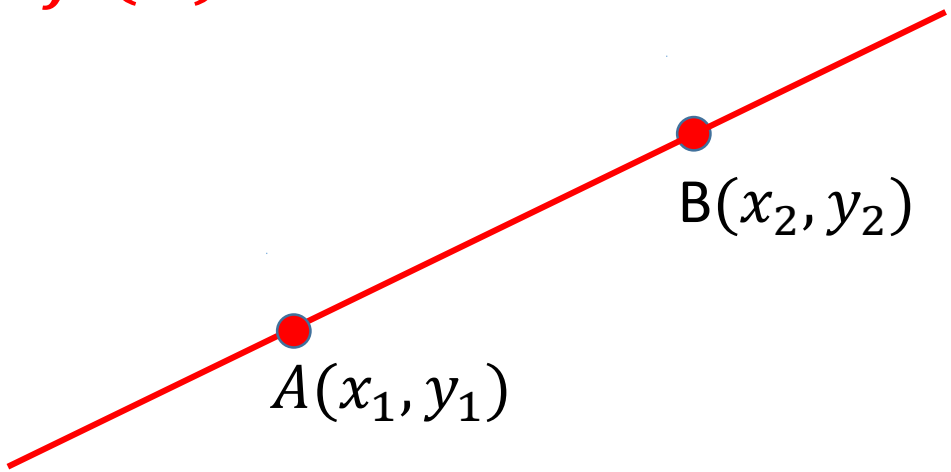
と書けます。

特に後者の書き方は今後「函数$f(x)$上の点 $(x, f(x))$がある」
などと、さらっと使われることがあるので慣れて下さい。

ここからの
数スライドは
特に手を動かして
自分で計算しないと
わからないように
デザインされて
います。

問題演習：2つの点を通る直線の式を求めてみましょう

$$f(x) = ax + b$$



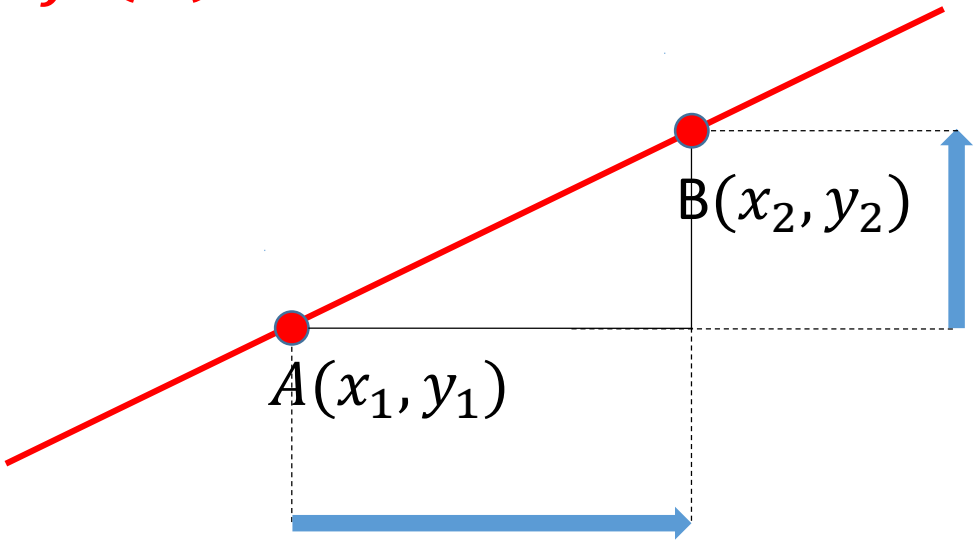
いま、点$A(x_1, y_1)$と点$B(x_2, y_2)$を通る直線の式を求めてみましょう。

あるいは、同じ意味の言葉を言い換えると、点ABを通る直線がある時、a, bは何でしょう。

まず、傾きを求めてみましょう。

$$f(x) = ax + b$$

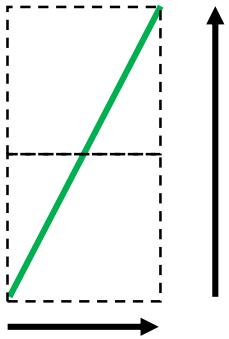
いま、傾きaは
どうしたら求まるでしょうか？



y軸が$y_2 - y_1$増えている

x軸が$x_2 - x_1$増えると

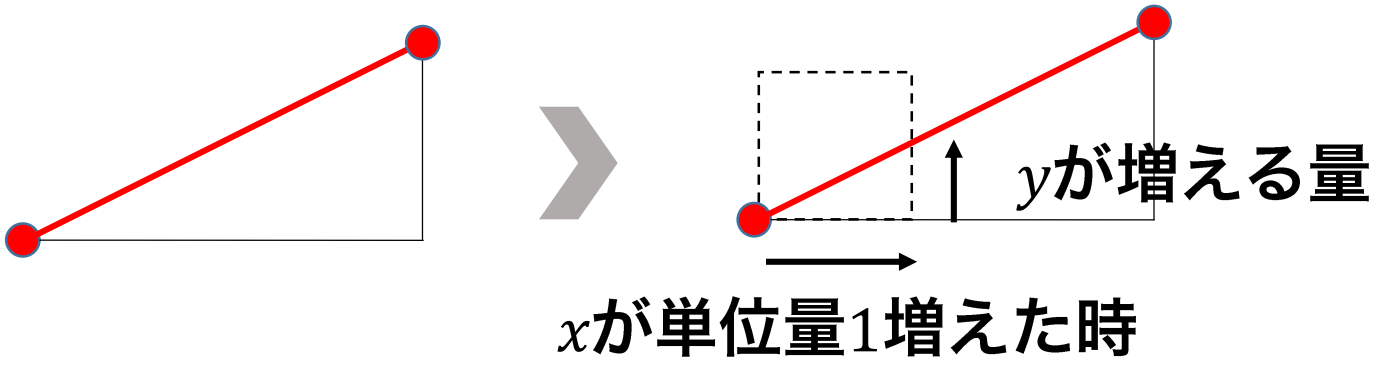
傾きの定義



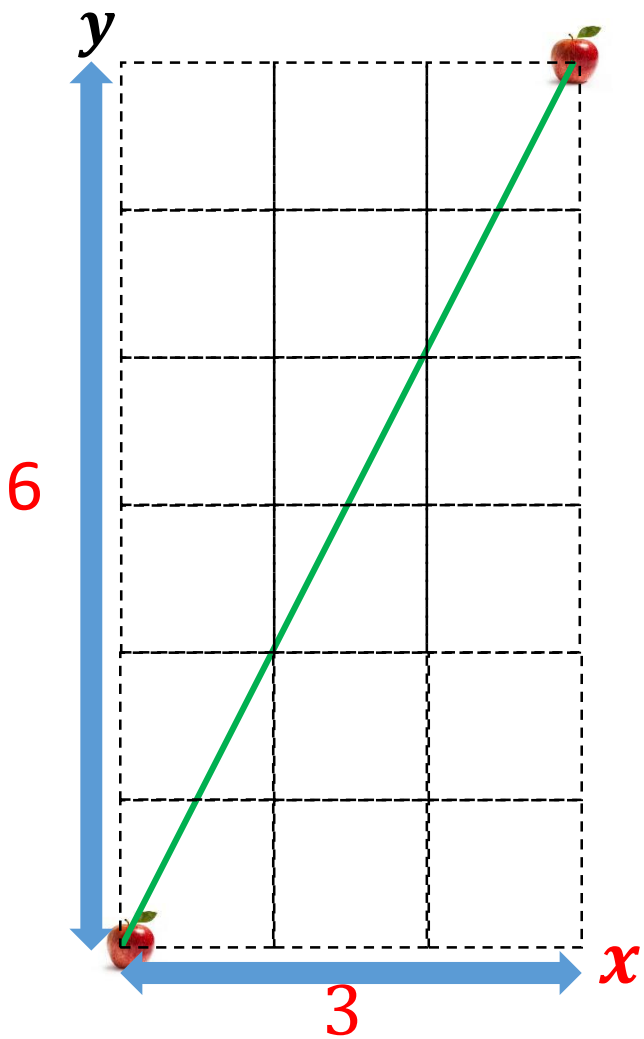
yが増える量

xが単位量1増えた時

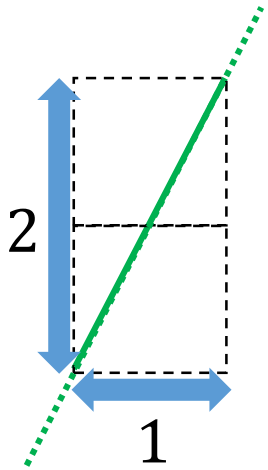
単位量「１」に揃えるには、どうしたらいいでしょうか？



単位量「１」に揃えるには、どうしたらいいでしょうか？
迷った時は「具体例」

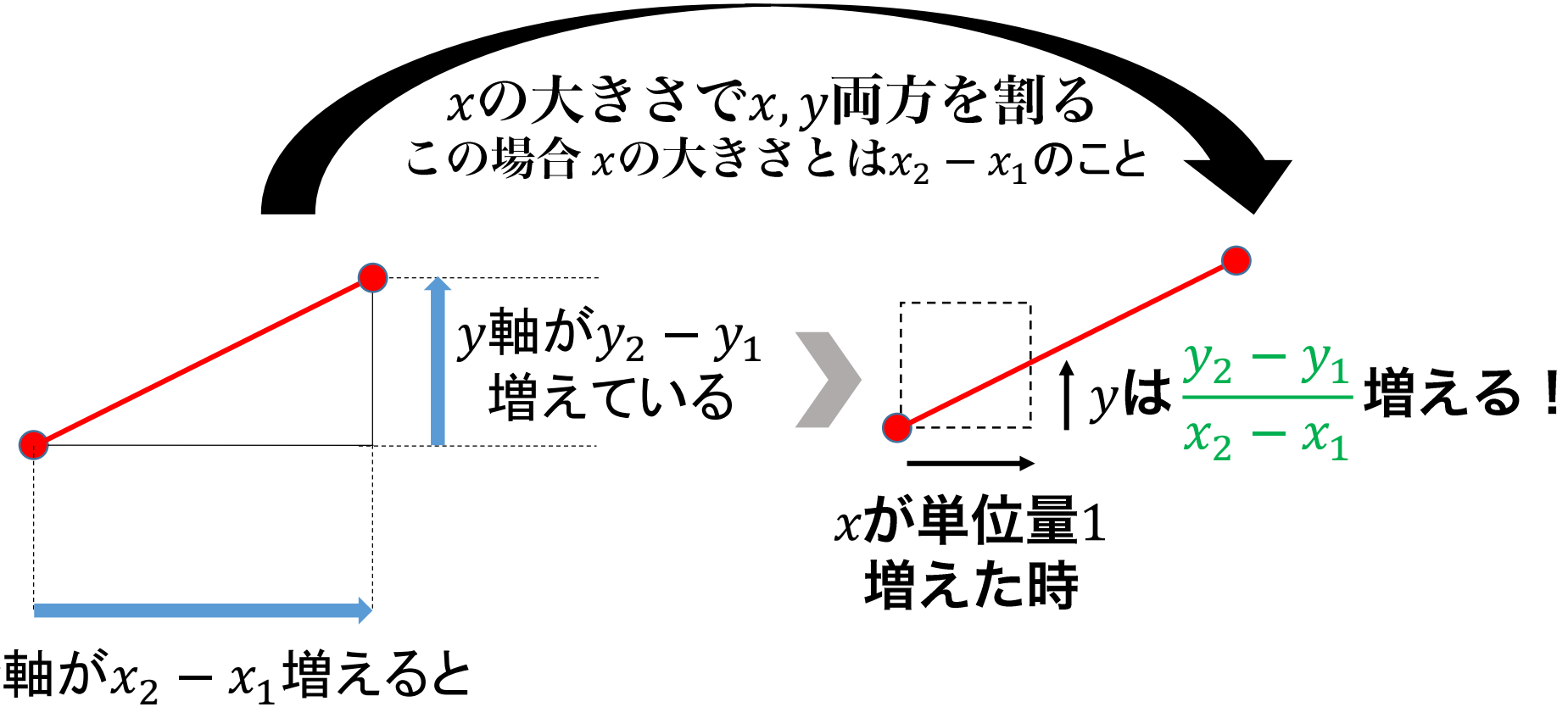


xが3増えた時、yが6増える直線は、
xが1増えた時、yが2増えている！！



xの大きさ(この場合は3)で、
x, yの両方を割ってやると
「1」に揃えられる。

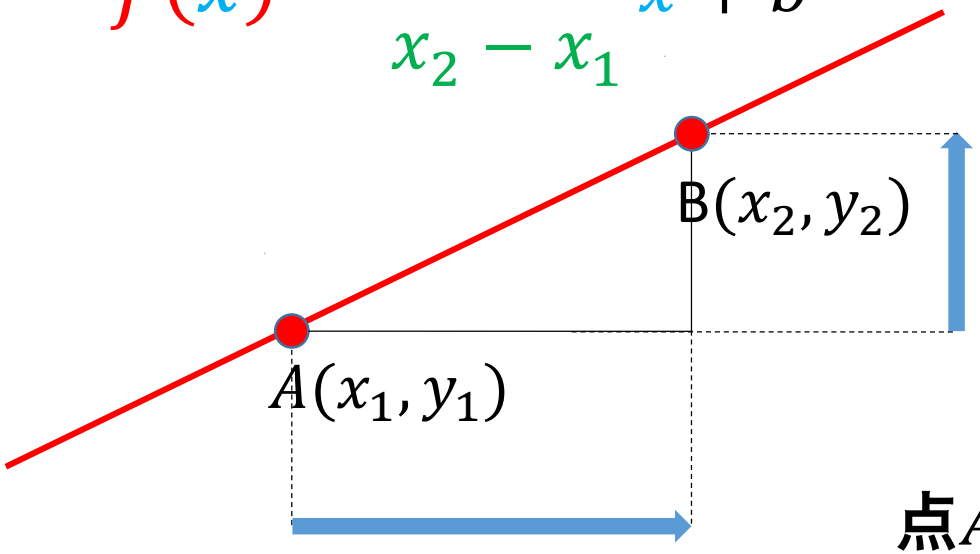
単位量「1」に揃えるには、xの大きさで割る。



よって、傾きaは$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

いま、ここまでわかりました。あとはbだけ！

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + b$$



y軸が$y_2 - y_1$増えている

x軸が$x_2 - x_1$増えると

点A, Bを代入するとこうなるはず。

$$f(x_1) = y_1$$
$$f(x_2) = y_2$$

ここの意味が、分かりますか？
直線$f(x)$上の点であるということは、
代入して成立するということです。

機械的に計算してみよう！！

機械的代入　ふたたび

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + b$$

xにx_1を代入

$$f(x_1) = y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + b$$

xにx_2を代入

$$f(x_2) = y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_2 + b$$

この式をまず、$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + b$の、
<u>bについての方程式</u>だと思って解いてみましょう。

つまり、 $b = (b$を含まない数や数式$)$の形を目指します。
いま知りたい未知数は、 bだからです。

アタマを使わず解く方程式　ふたたび

元の式 $y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b$ から b を求める！

この両側から同じ数「　　」を
引き算してみましょう！

整理すると

$= b$

アタマを使わず解く方程式　ふたたび

元の式 $y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b$

この両側から同じ数「 $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$ **」を引き算してみましょう！**

$$y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b$$

計算すると

$$y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = b$$

(左辺)に $1 = \dfrac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1}$ **に留意しながら変形**

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = b$$

計算すると

$$\frac{(x_2 - x_1)y_1 - (y_2 - y_1)x_1}{x_2 - x_1} = b$$

展開すると

$$\frac{x_2 y_1 \cancel{- x_1 y_1} - y_2 x_1 \cancel{+ y_1 x_1}}{x_2 - x_1} = b$$

整理すると

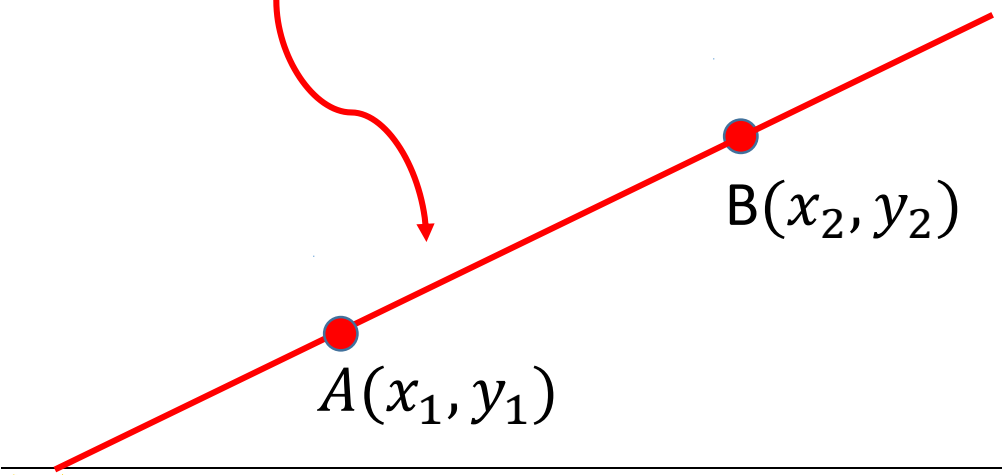
$$\frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = b$$

２点を通る直線の「一般式」を、表現できた！

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + b$$

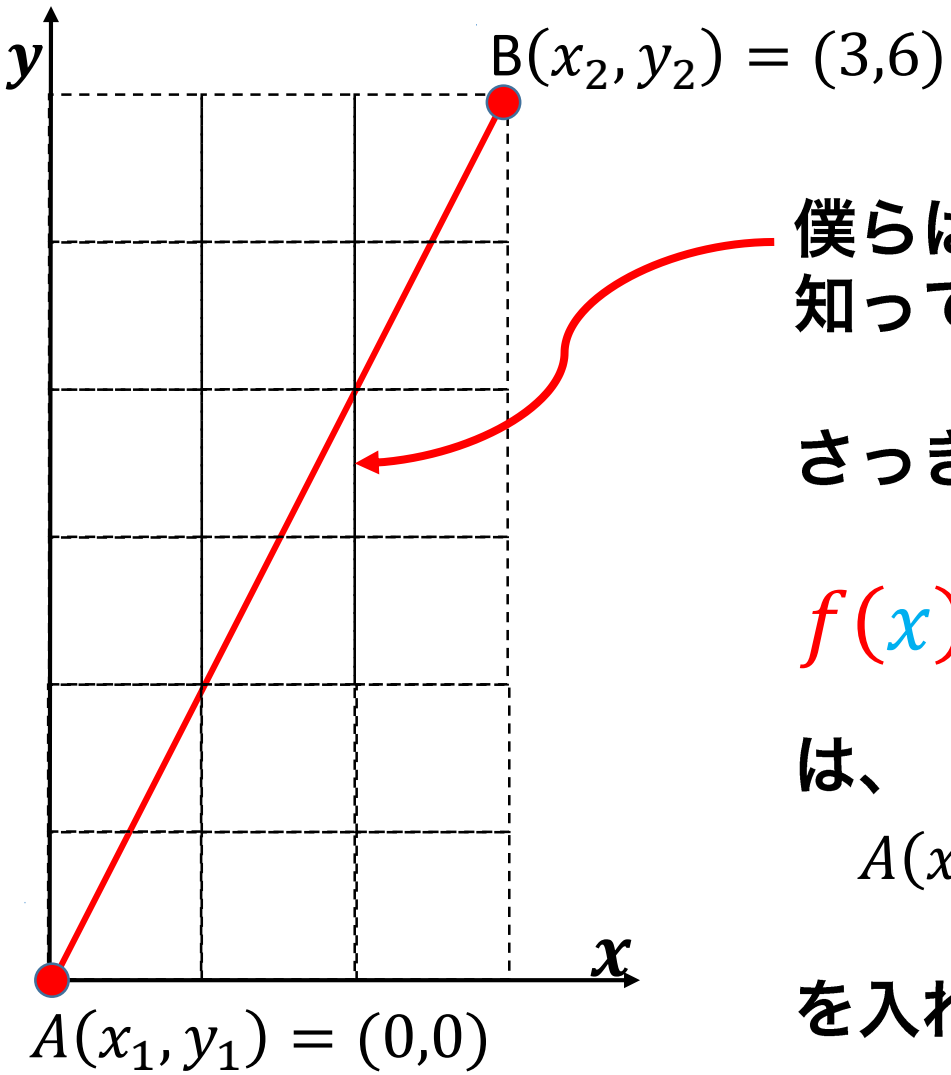
$$\frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2 - x_1} = b$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$$



xは変数。
x_1, y_1, x_2, y_2は座標の値
だということに注意しよう。

ホントにそうなるの？確かめてみよう！



僕らはこの式が$f(x) = 2x$になることを知っている。

さっきの式

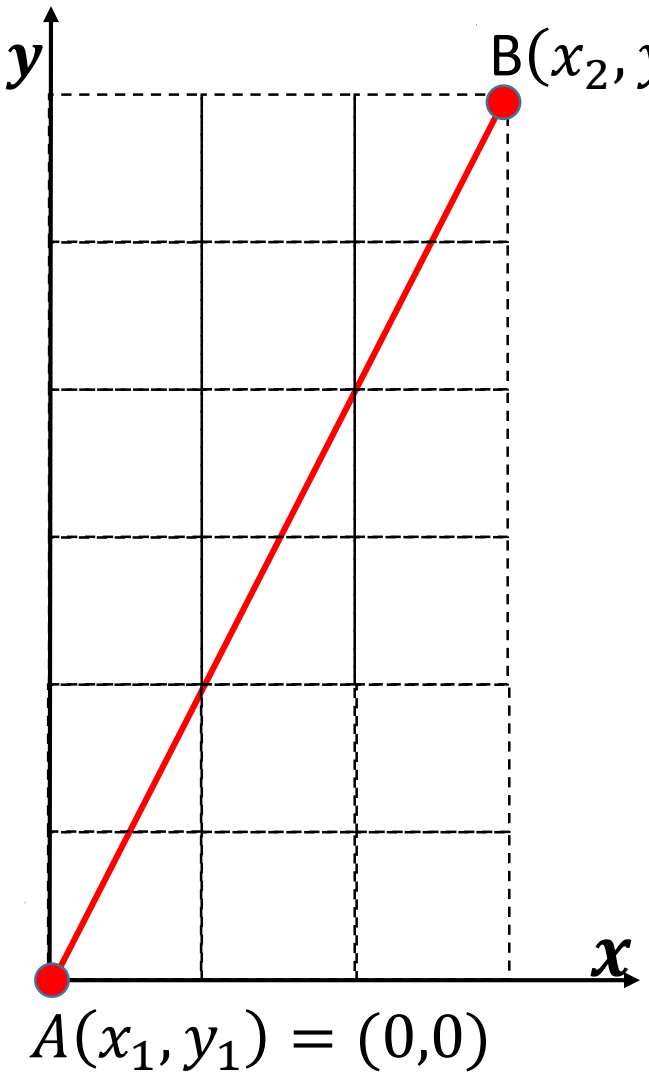
$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

は、

$$A(x_1, y_1) = (0,0), \quad B(x_2, y_2) = (3,6)$$

を入れた時、ホントにそうなるのか？

ホントにそうなるの？確かめてみよう！



$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

さっそく$A(x_1, y_1) = (0,0)$, $B(x_2, y_2) = (3,6)$
を入れてみましょう！！

$$f(x) = \frac{6-0}{3-0}x + \frac{3 \times 0 - 6 \times 0}{3-0}$$

$$= \frac{6}{3}x + \frac{0-0}{3}$$

$$= 2x$$

ホントだった!!!

コラム：数学の求める「一般」と「特殊」

数学では、点$A(0,0)$、点$B(3,6)$のように、具体的数値を入れた書き方ではなく、点$A(x_1, y_1)$、点$B(x_2, y_2)$のような抽象的な書き方を好みます。

そうやって抽象的に表現することで、数学は翼を獲得するのです。
先ほど求めた

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

は「この世のすべての、2点を通る直線を定義できる式」です。

点$A(x_1, y_1)$、点$B(x_2, y_2)$のかわりに、具体的座標を入れれば、式$f(x)$を求めることができます。

コラム：数学の求める「一般」と「特殊」

このように「すべて」を表現できるものを「一般」と呼びます。
対義語は「特殊」です。

例えば、$f(x) = 2x$という式は、
$f(x) = ax + b$という、直線の一般式が、$a = 2, b = 0$という
「特殊」な条件の時です。
特殊は、具体的と言ってもよいかもしれません。

数学者は「すべて」を表現できることに価値を感じます。
「具体的な何か」からはじめて、「すべて」に使えるように
することを、「一般化」と言います。

コラム：数学の求める「一般」と「特殊」

ですから数学者は、

1,2,3...を考えるかわりに、自然数n について思いを馳せます。

時速3kmで歩くたかしくんを考えるかわりに、
速度vで動く存在を考えます。

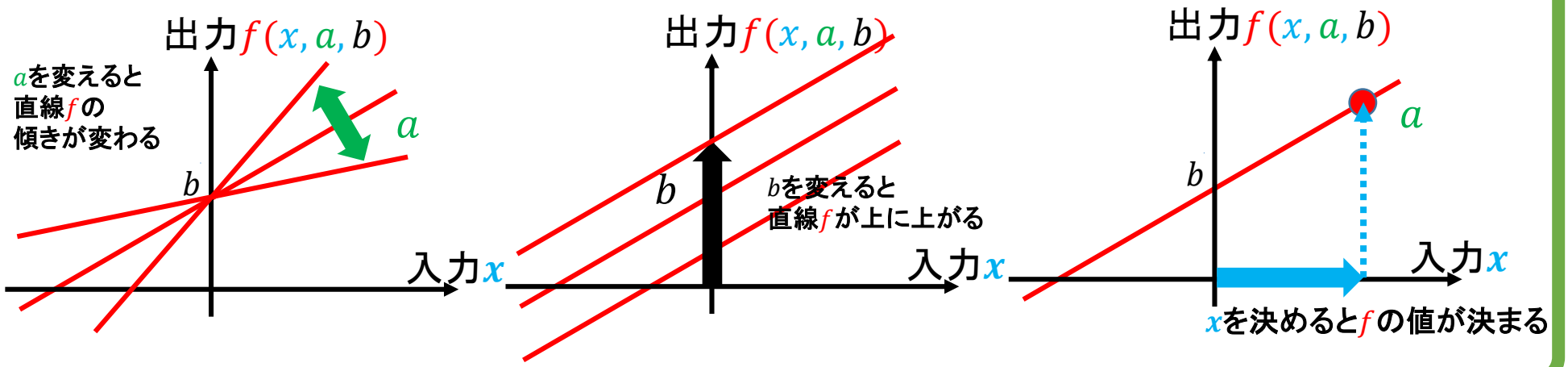
目の前の具体的な現象や問題から、
宇宙の全てに通用する真理を導く視座が、
数学者にはあります。

コラム：数学の求める「一般」と「特殊」

ですから、本当は、$f(x) = ax + b$は3変数の函数です。

$$f(x, a, b) = ax + b \quad \text{の}$$

3つの変数それぞれが、次のことをあらわします。



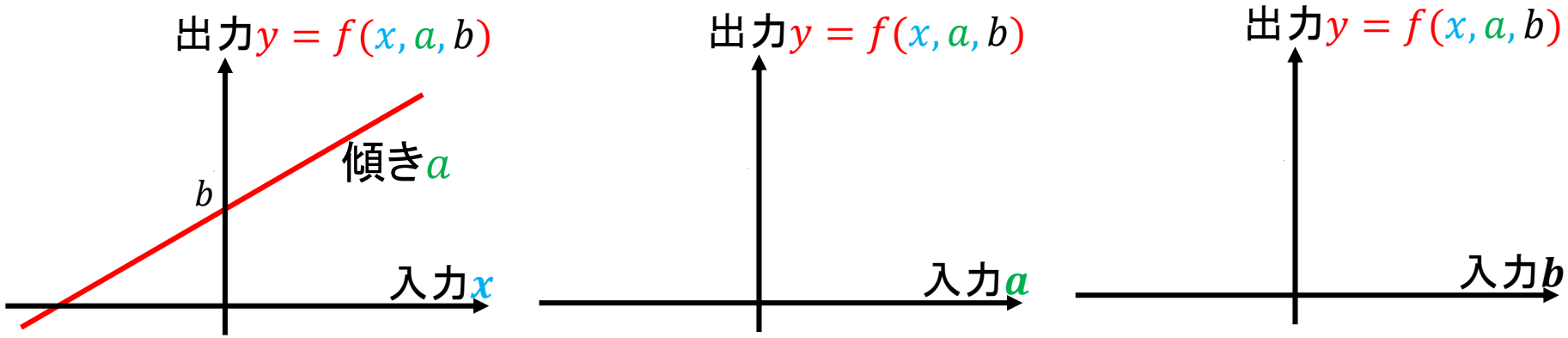
コラム：数学の求める「一般」と「特殊」

ハイレベル問題演習(丸暗記や慣れでなく、理解していれば解ける！)

$y = f(x, a, b) = ax + b$　を

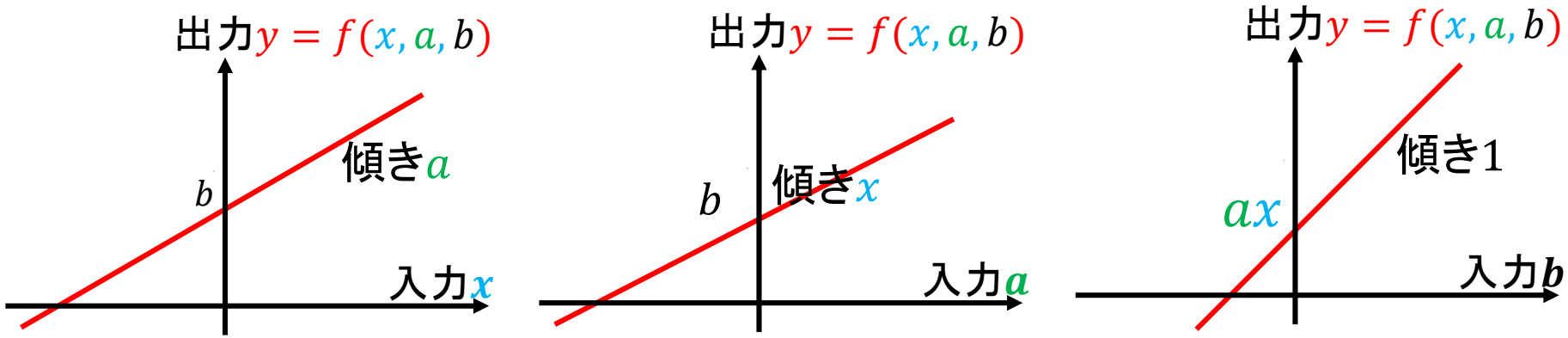
xy平面、ay平面、by平面で描画できますか？

xy平面はそのままですが、残りの二つはどうでしょう？

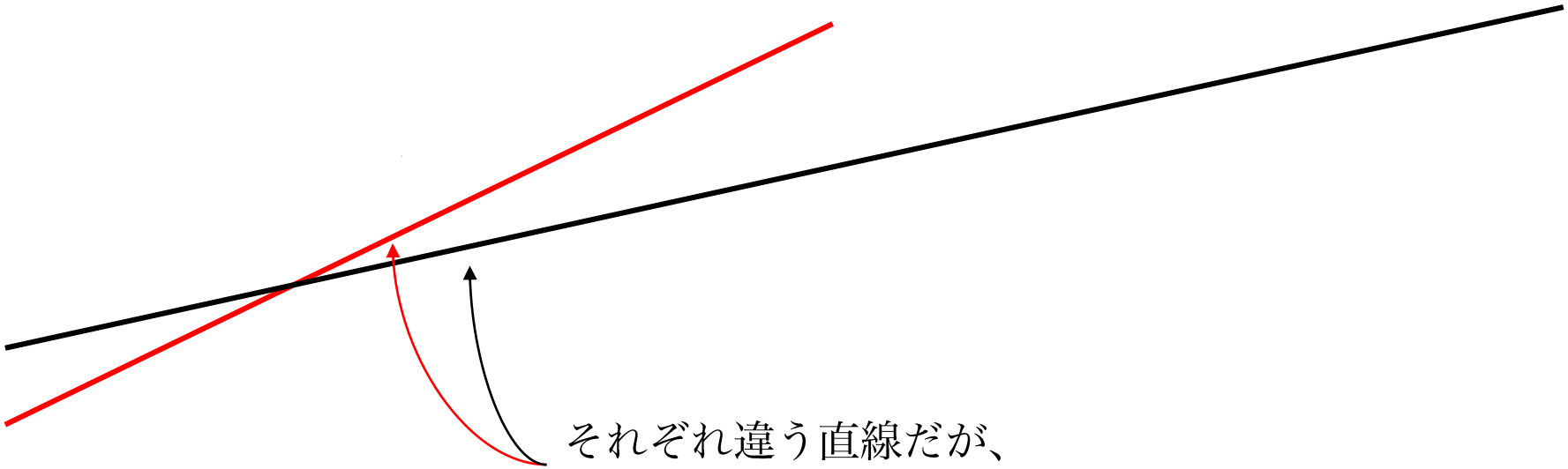


コラム：数学の求める「一般」と「特殊」

$y = f(x, a, b) = ax + b$　を
xy平面、ay平面、by平面で描画する

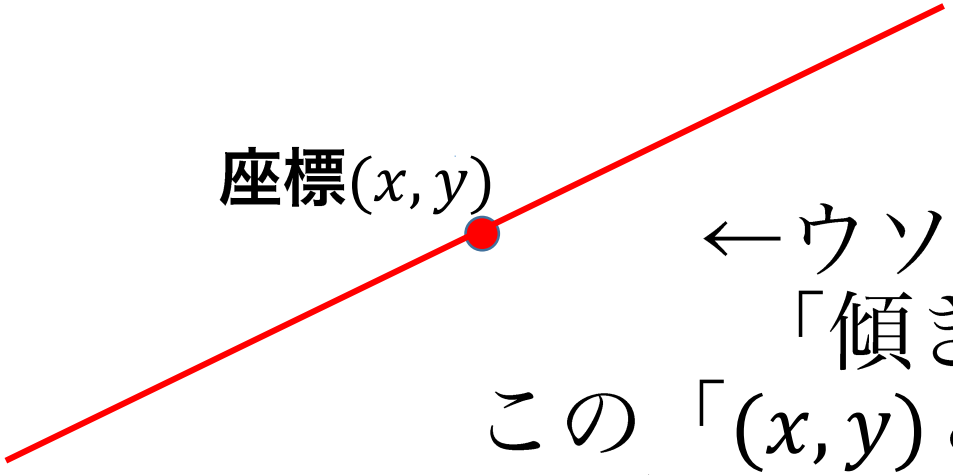


(無限の長さの)直線を一番簡単に「定義」するには どうしたらよいでしょう？



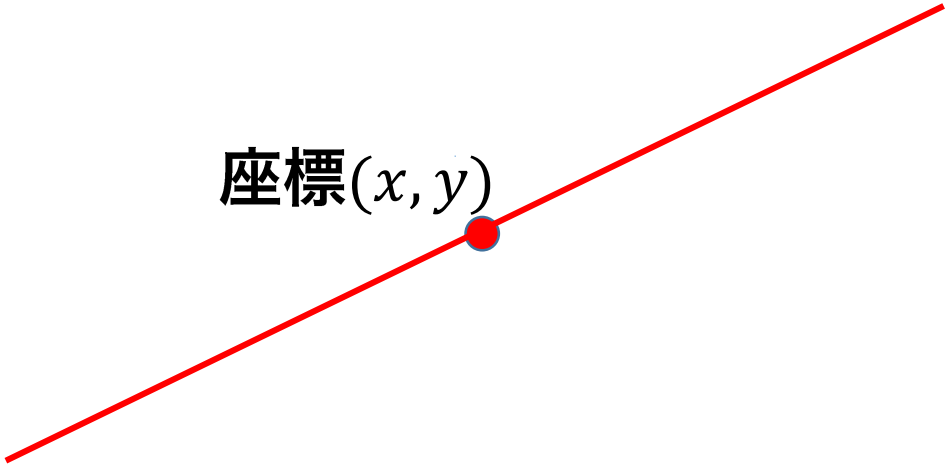
それぞれ違う直線だが、
赤い直線を、一番シンプルに定義するには…？

通過する点「1点」の場所と、
傾きが決まれば、直線は決まります。



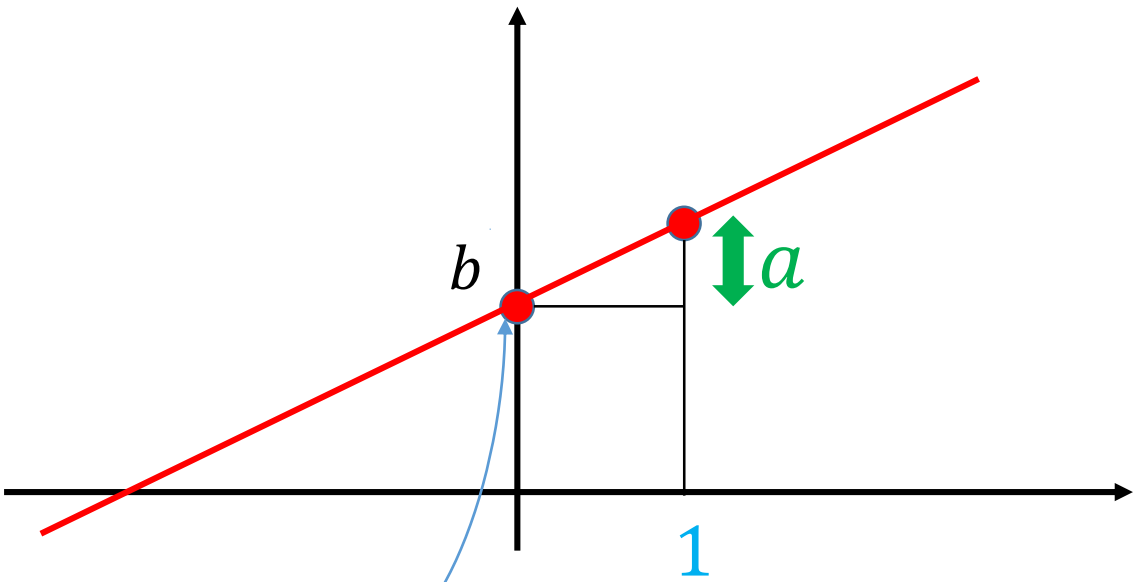
←ウソだと思ったら、
「傾きはそのまま」
この「(x, y)という点は絶対通る」
という条件の別の直線を描いてみよう！

では、いちばんシンプルでわかりやすく直線を定義したら、どうなるか？



一番シンプルな1点とはどこでしょうか？

函数の可視化(図示)



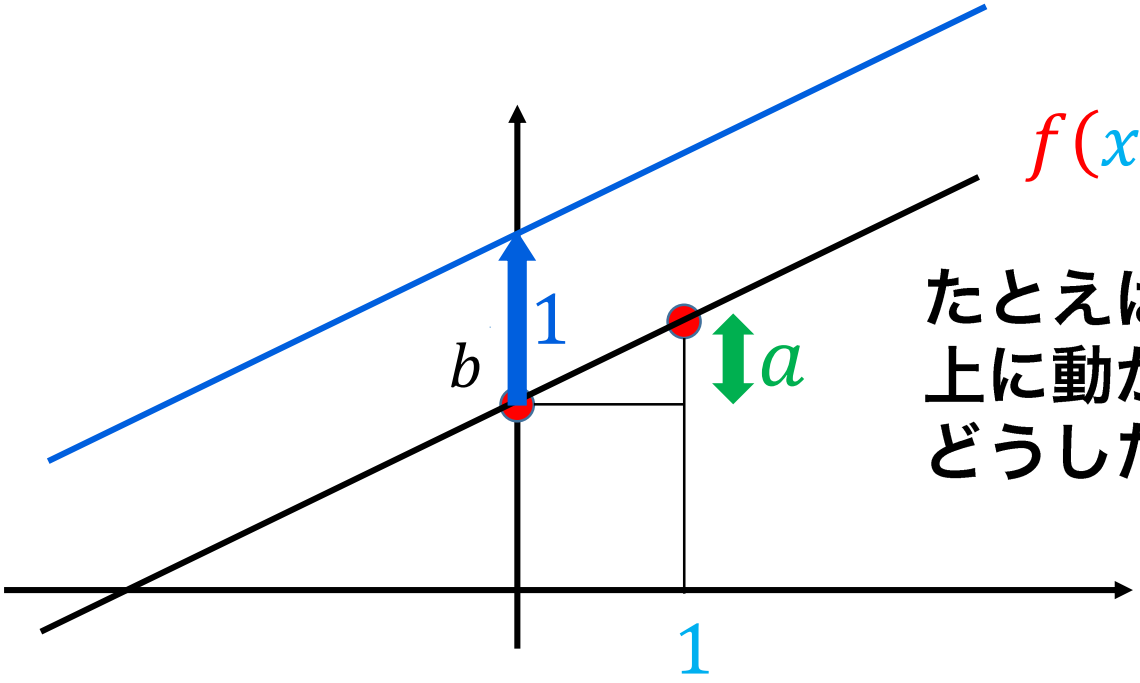
$$f(x) = ax + b$$

一番シンプルな1点、$x = 0$の時に通る「点」と、「傾き」で直線を定義しよう。

座標$(x, y) = (0, b)$を通り傾きがaである ことが分かれば、直線の定義はできてしまう。

ちなみに
このときのbを「y切片」
と言います。yを切るからです。

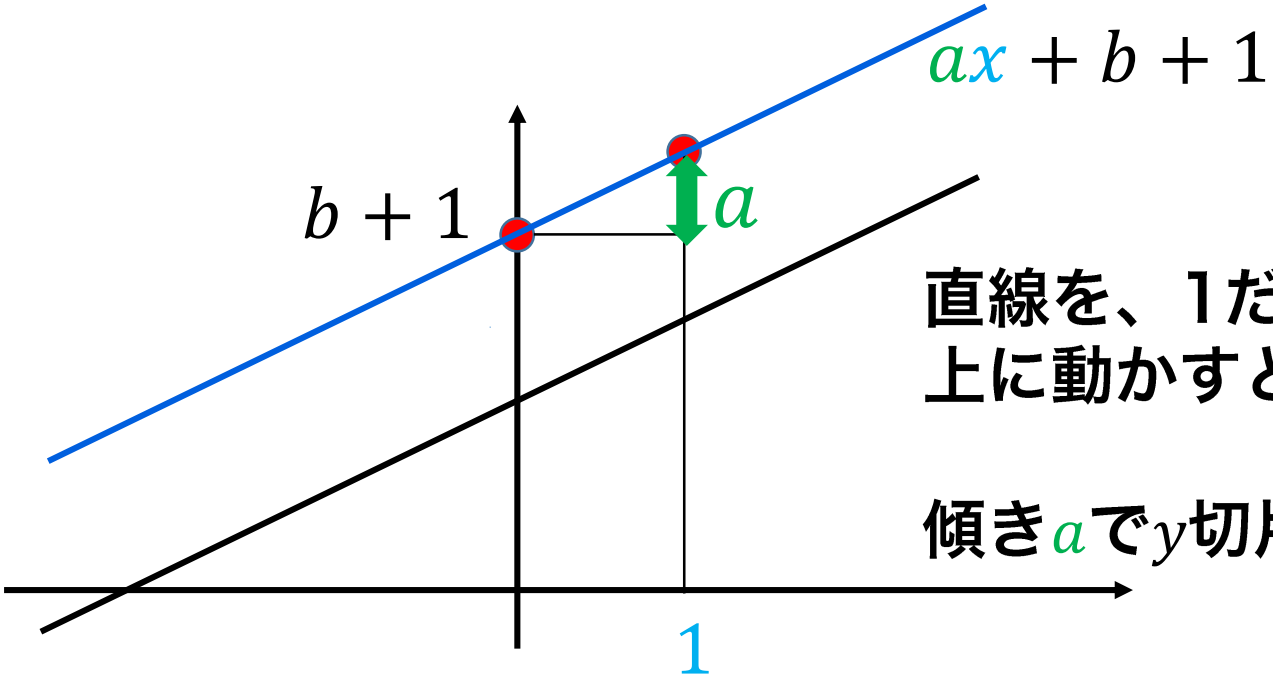
直線を操作するには、どうしたらいいでしょう



$$f(x) = ax + b$$

たとえば、直線を、1だけ、
上に動かすには、
どうしたらいいでしょう？

直線を操作するには、どうしたらいいでしょう

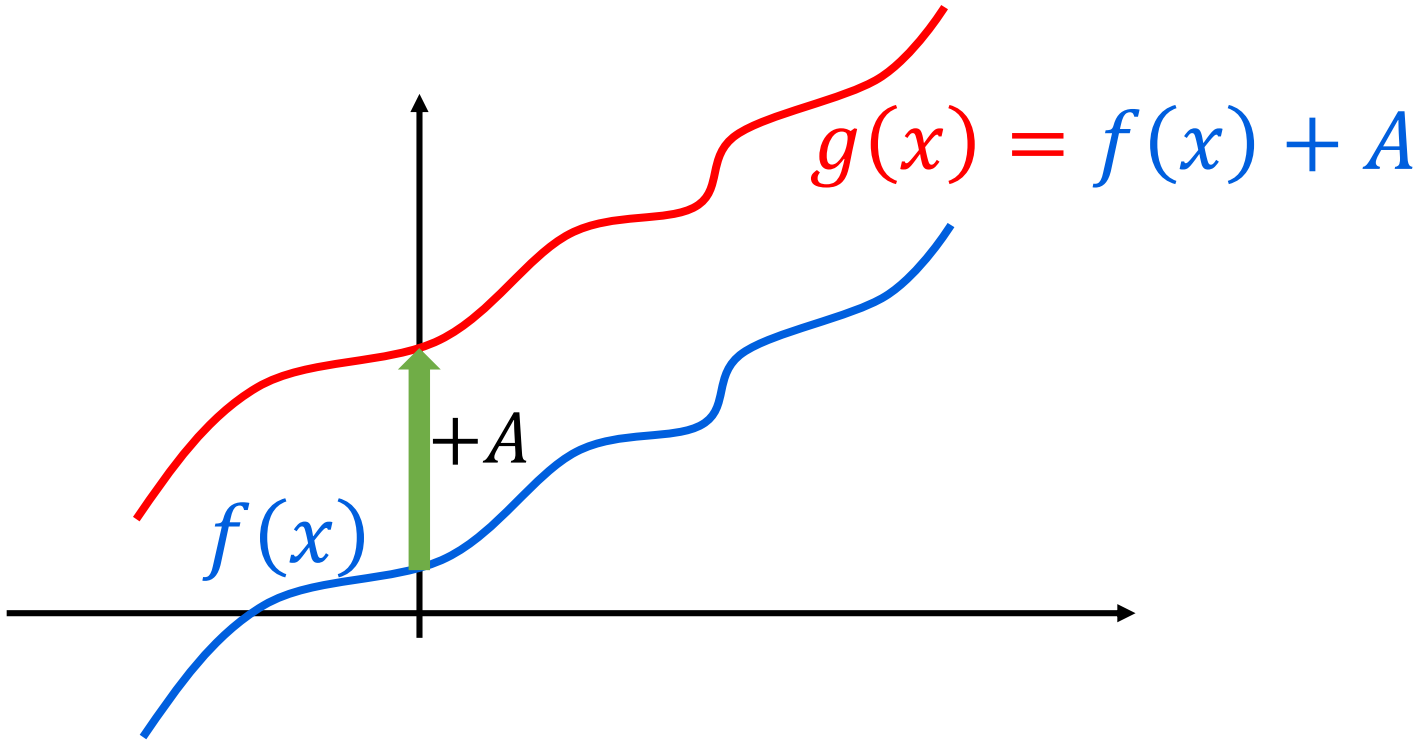


直線を、1だけ、
上に動かすと、

傾きaでy切片が$b + 1$の直線になる

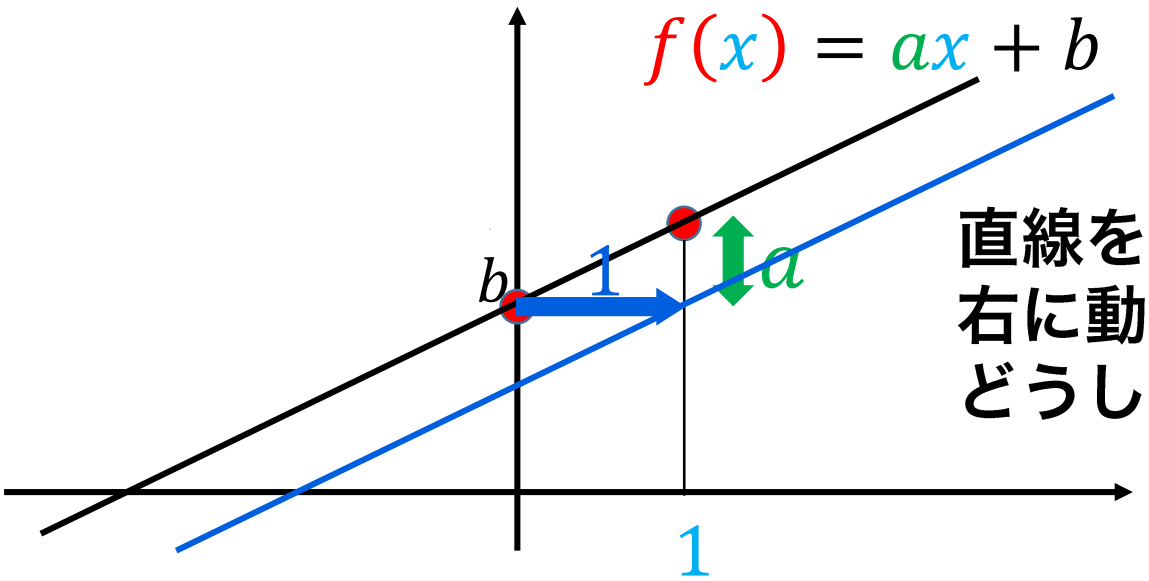
直線を上下に操作したい場合、式に単に数を足したり引いたりすればいい。
例えば、$f(x)$をAだけ上に動かすなら$f(x) + A$

「$f(x)$をA上に動かすなら$f(x)+A$」の意味



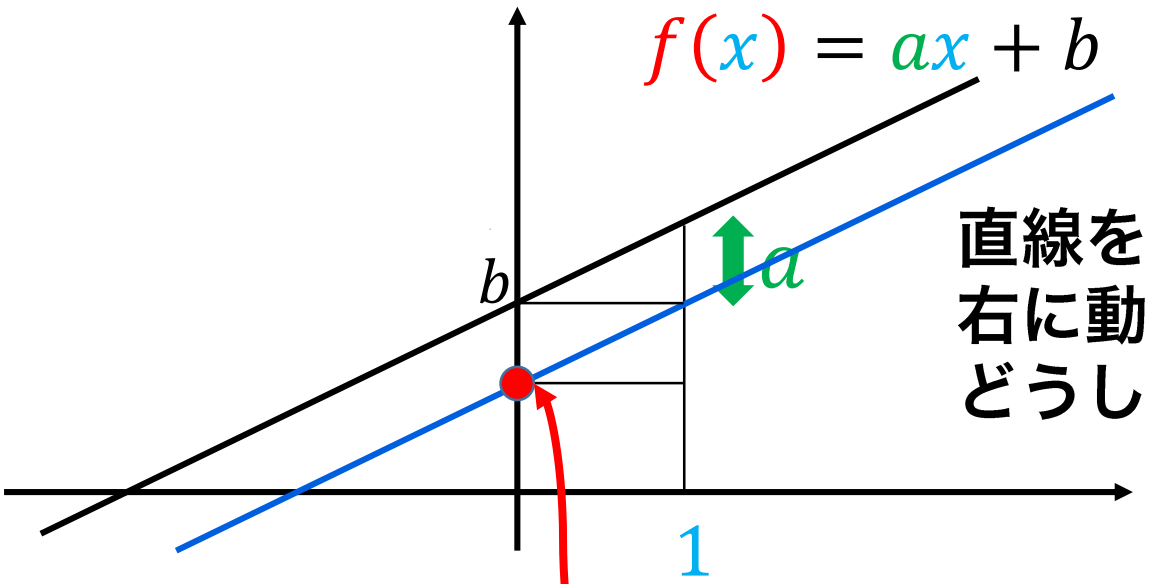
直線にかぎらず、$f(x)$をAだけ上に動かすなら
$g(x)=f(x)+A$とすればよい

直線を操作するには、どうしたらいいでしょう



直線を、1だけ、
右に動かすには、
どうしたらいいでしょう？

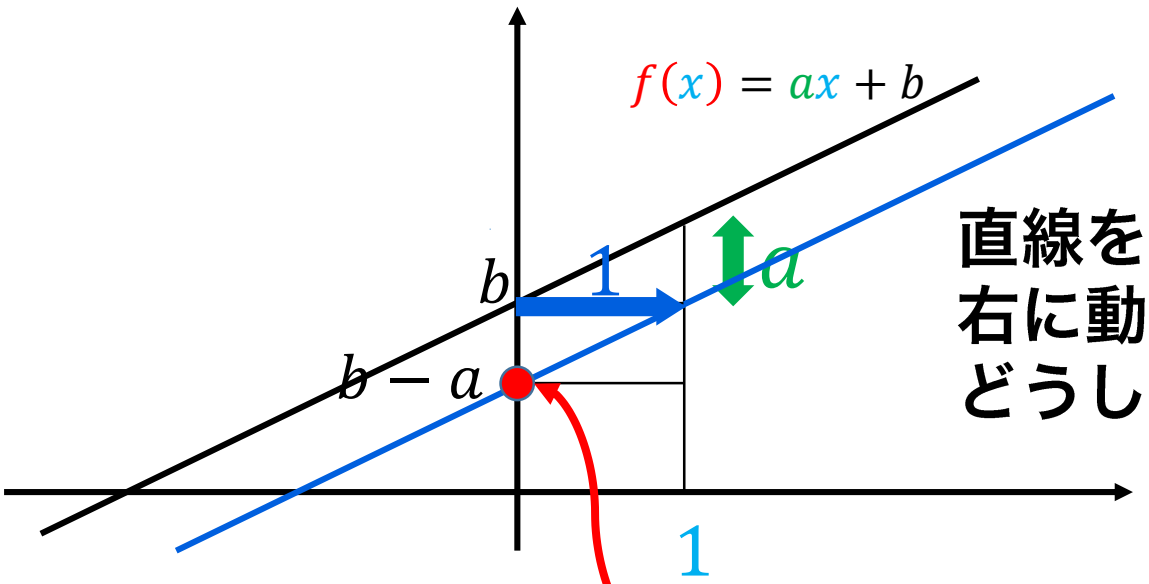
直線を操作するには、どうしたらいいでしょう



直線を、1だけ、
右に動かすには、
どうしたらいいでしょう？

ここのy切片の値がわかればいい！
図形的に解くとどうなるでしょう？

直線を操作するには、どうしたらいいでしょう



直線を、1だけ、
右に動かすには、
どうしたらいいでしょう？

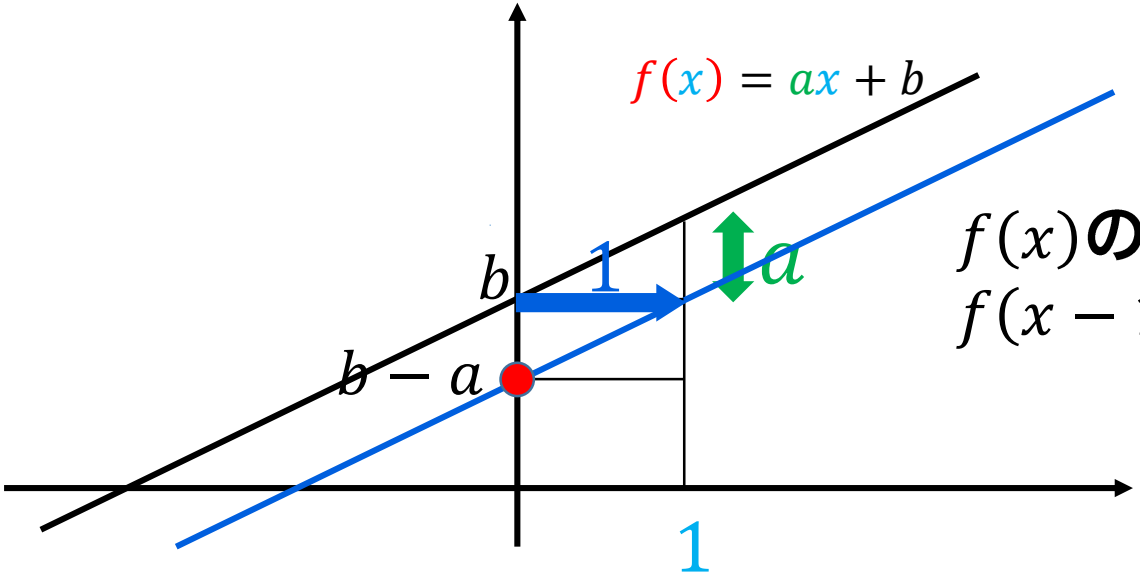
図形的に解くと$b - a$のはず。
$b - a$を通り傾きaの直線は、

$$ax + b - \mathrm{a}$$

式変形すると

$$a(x - 1) + b$$

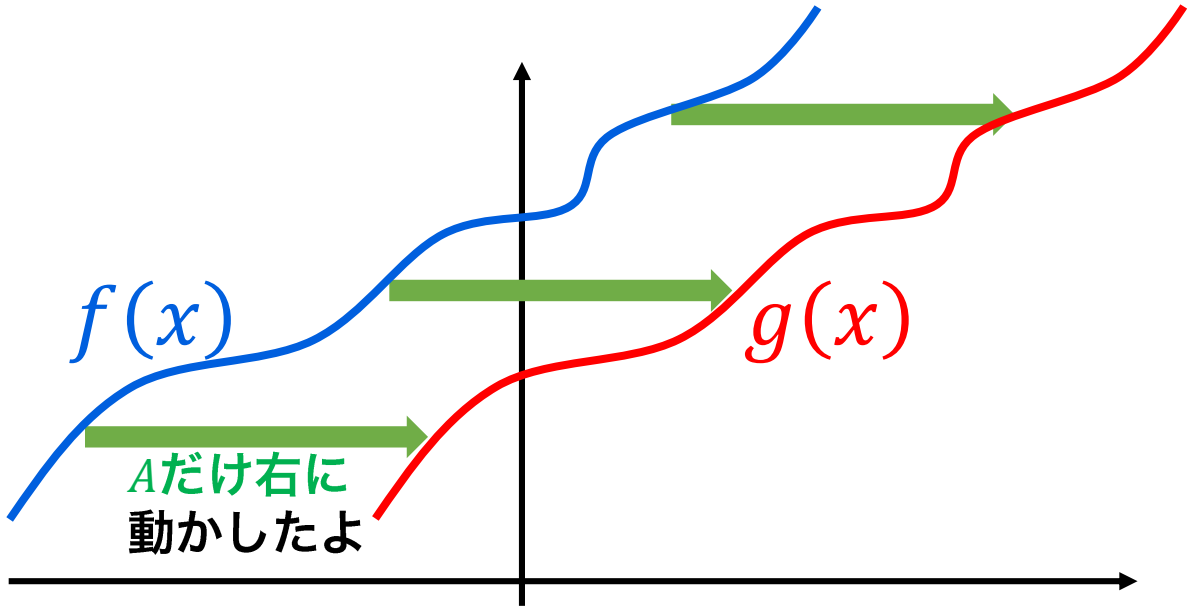
直線を操作するには、どうしたらいいでしょう



$f(x)$の図を、1だけ右に動かすには、
$f(x-1)$にすればよい。

同じように、
$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには、
$f(x-A)$にすればよい。

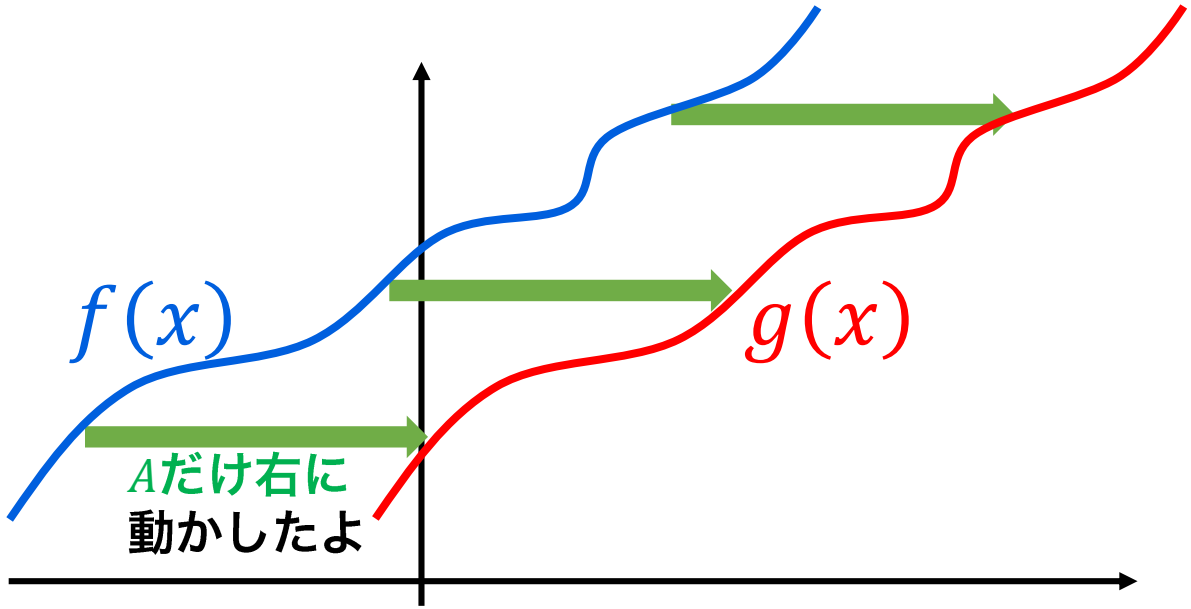
「$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには $f(x-A)$にすればよい」の意味



いま、$f(x)$のグラフと、
それを右にAだけ動かした函数$g(x)$の図を、用意しました。

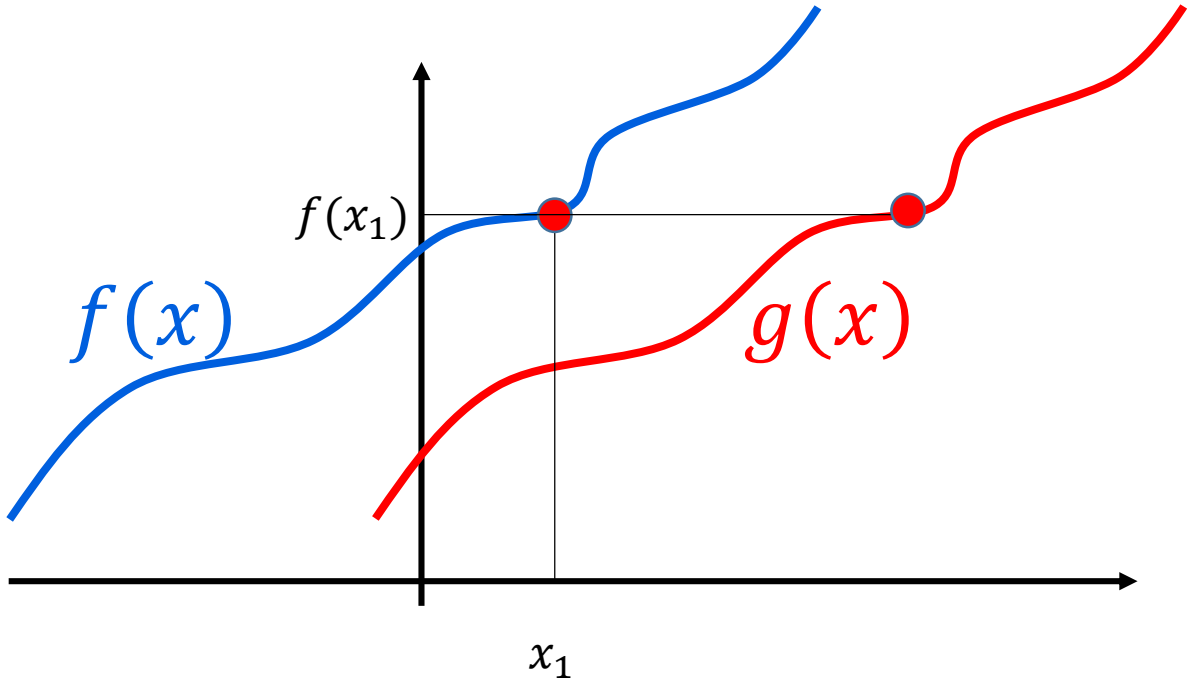
この函数$g(x)$が$f(x-A)$とイコールである、ということが
今から示したいことです。

「$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには $f(x-A)$にすればよい」の意味



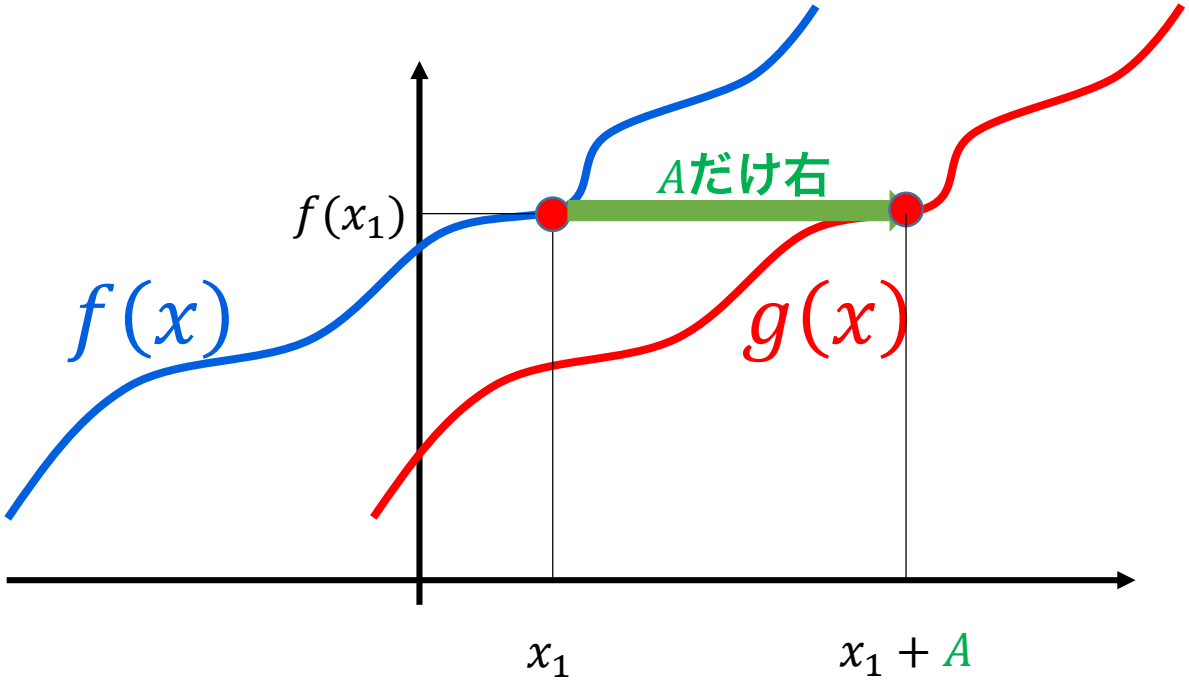
いま、$f(x)$のグラフと、
それを右にAだけ動かした函数$g(x)$の図を、用意しました。

「$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには $f(x-A)$にすればよい」の意味



いま、$f(x)$のグラフ上で、点$(x_1, f(x_1))$を取ってみましょう。
これと同じ$y = f(x_1)$の値を、$g(x)$上で取るには、
xの値をいくつにする必要があるでしょうか？

「$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには $f(x-A)$にすればよい」の意味



図形的に考えると、$f(x_1)$と同じ値を$g(x)$上で取るには、グラフをAだけ右に動かしているのだから、$g(x_1+A)$にしないといけない。
これは、xの値がx_1の時だけでなく、あらゆるxでそうなるはず。
ということは　$f(x)=g(x+A)$…(式①)となる。

「$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには $f(x-A)$にすればよい」の意味

いま、$f(x)=g(x+A)$…(式①)となることを見てきました。

ところで、「函数$g(x)$が$f(x-A)$とイコールである、
ということが、今から示したいこと」でした。

なので、いま、式①のxに$x-A$を代入してみましょう。
(式①)は全てのxで成立するため、このような代入が許されます。

$$f(x-A)=g(x-A+A)-g(x)$$

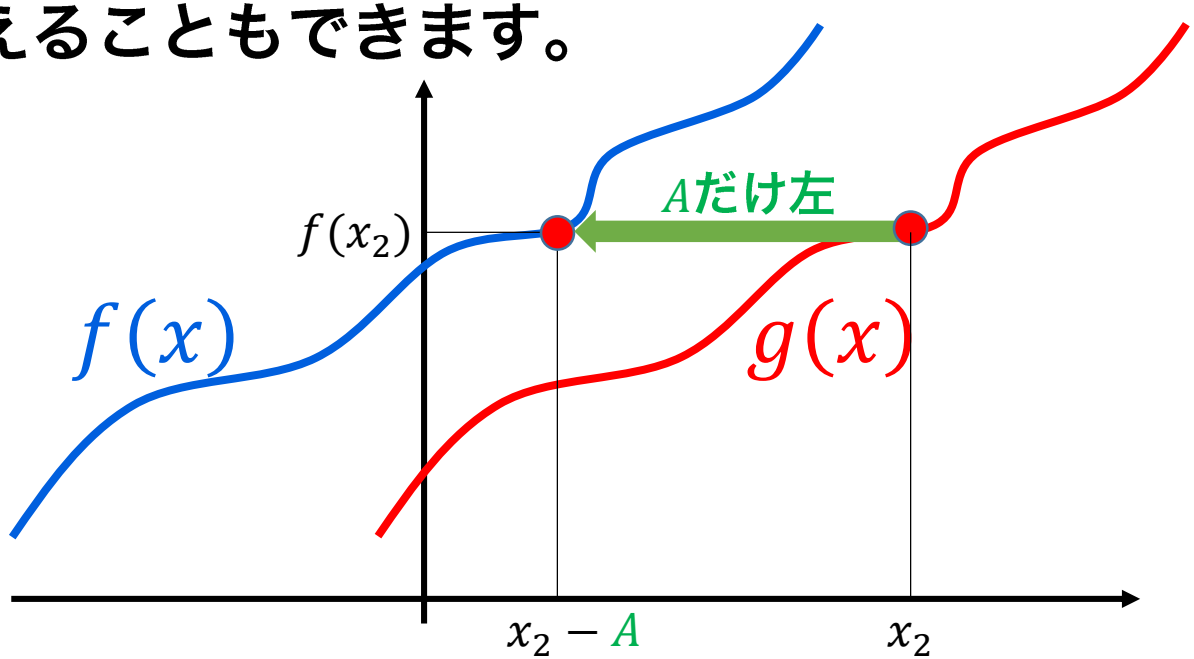
よって、

$$f(x-A)=g(x)$$

であることが示されました。

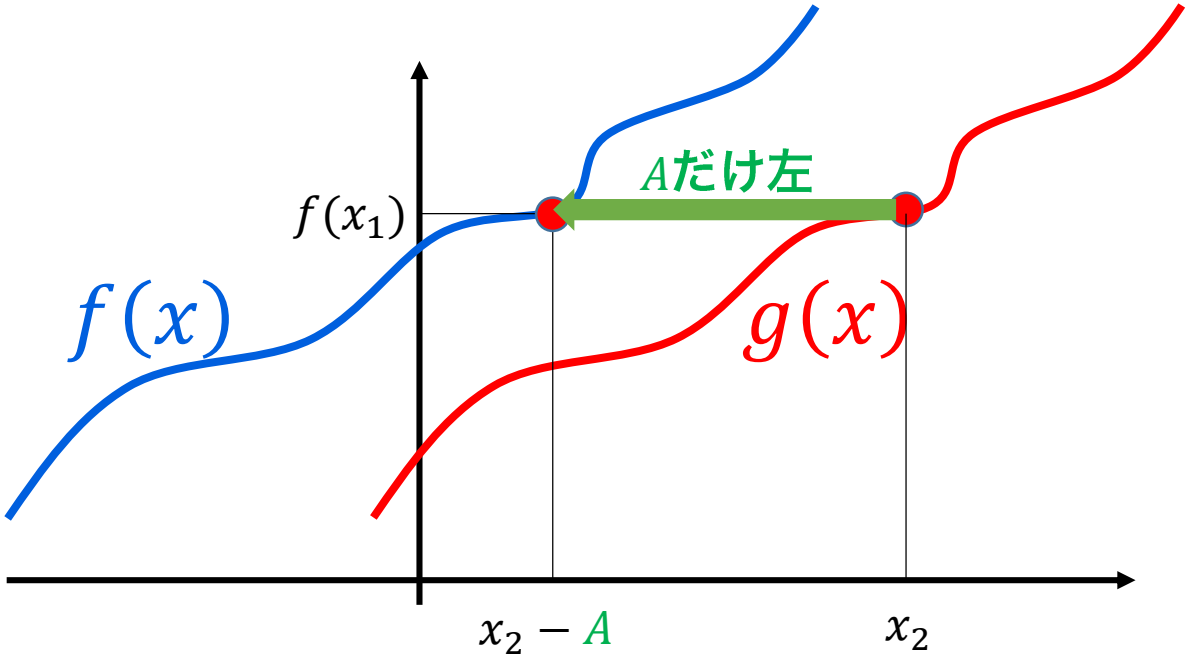
「$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには $f(x-A)$にすればよい」の意味

もし、最後の代入が、なぜそれがOKなのか腑に落ちない場合、
次のように考えることもできます。



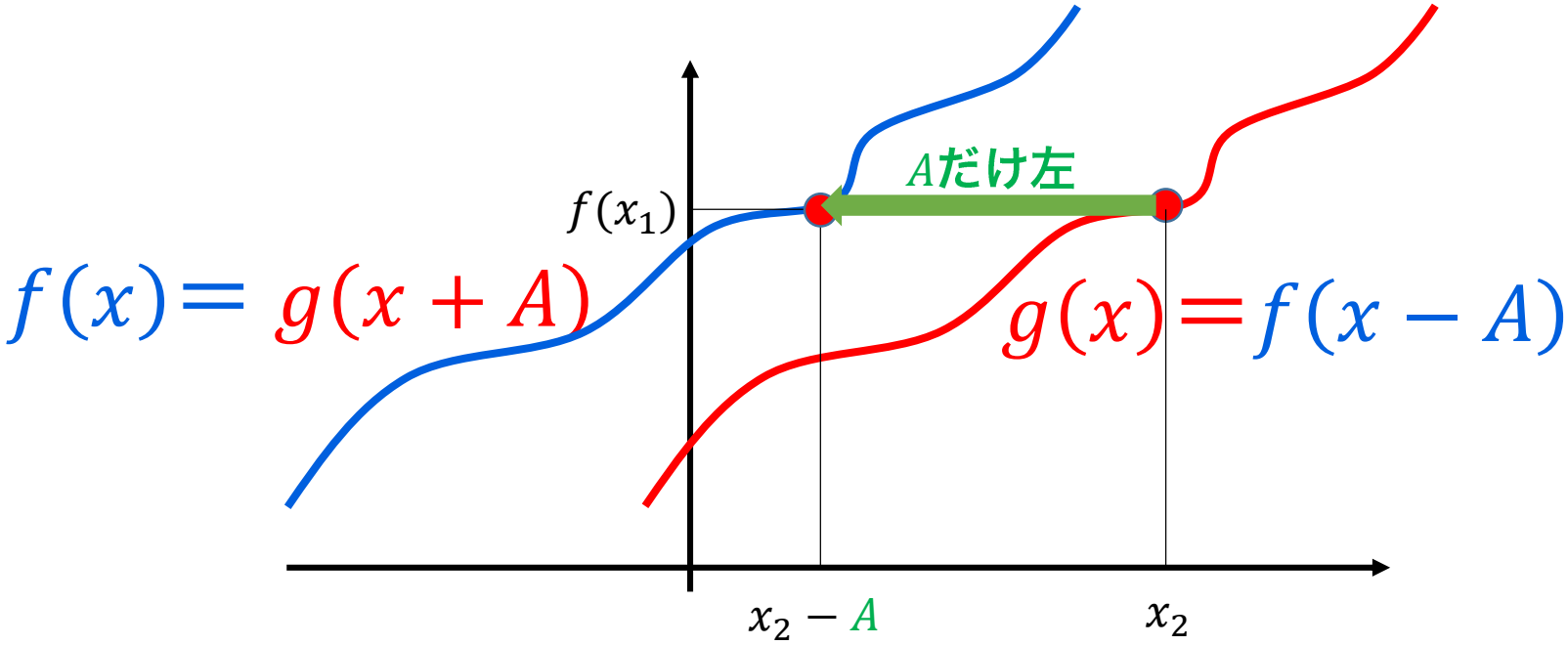
いま、$g(x)$のグラフ上で、点$(x_2, f(x_2))$を取ってみましょう。
これと同じ$y = g(x_2)$の値を、$f(x)$上で取るには、
xの値をいくつにする必要があるでしょうか？

「$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには $f(x-A)$にすればよい」の意味



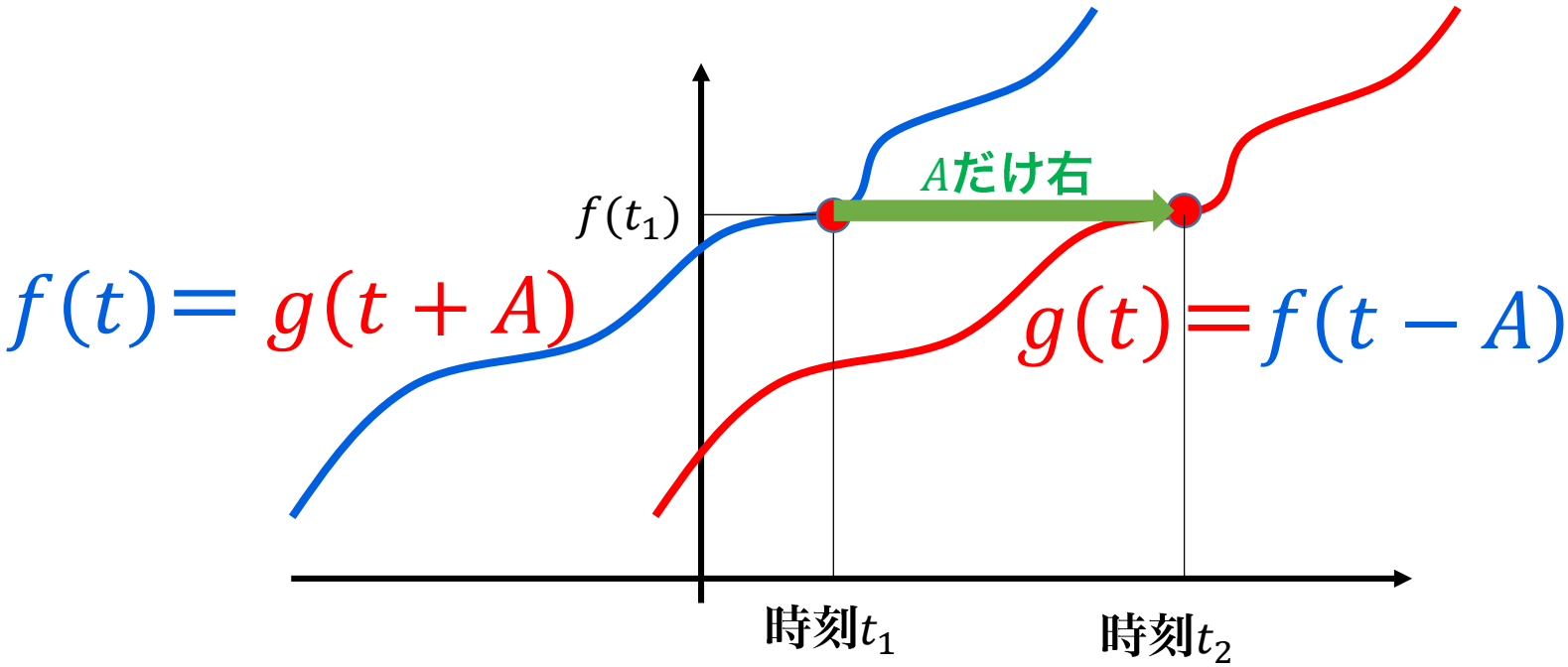
図形的に考えると、$g(x_2)$と同じ値を$f(x)$上で取るには、グラフをAだけ左に動かしているのだから、$f(x_2 - A)$にしないといけない。
これは、xの値がx_2の時だけでなく、あらゆるxでそうなるはず。
<u>ということは　$f(x-A) = g(x)$となる。</u>

よって、１次関数に限らず、あらゆる$y = f(x)$形式で書ける函数で、$f(x - A)$が、グラフをx軸のプラス方向にAだけ移動させたグラフになる。



右にA移動した図は、Aだけ遅延している

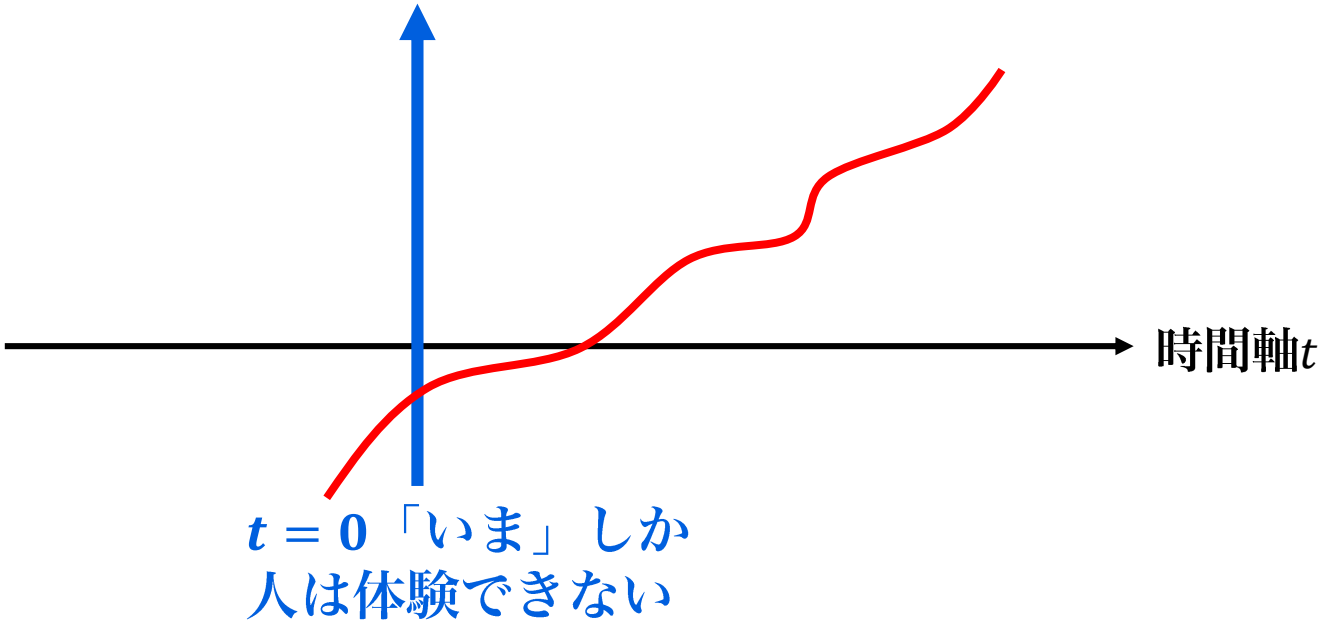
では、もし時間の函数だとどうなるか？



$f(t)$を右にA[秒]だけ移動した函数$g(t) = f(t-A)$は、
$f(t_1)$と同じ結果は、時間がAだけ遅れた$g(t_2) = g(t_1 - A)$
の時にやってくる。
$f(t-5)$だと、$f(t)$より5秒遅延して、
つまり5秒未来からやってくるわけだ。

時間は未来から流れてくるとはどういうことか

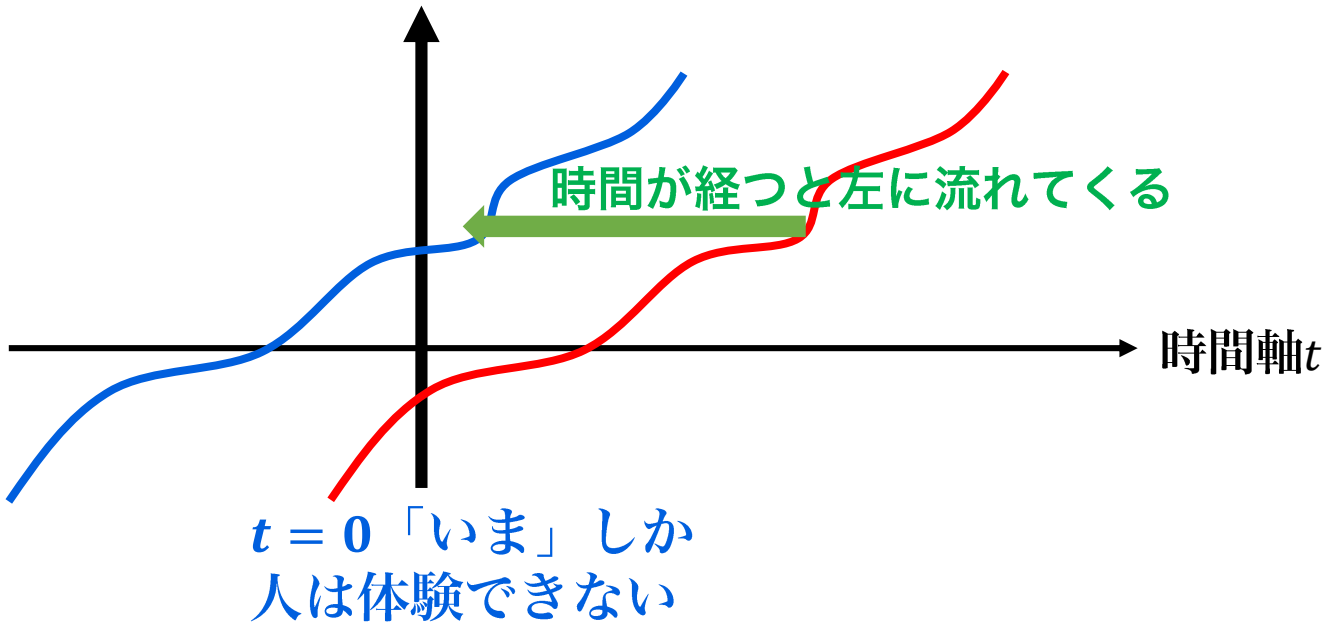
数学的には余談だが、ちょうど電車の中から外を見るように、
つまり、動いているのは本当は電車かもしれないが、
人間の体験的には、景色が前から後ろに流れていくのが
観測できるように、人間を中心とした時間軸を取るとすると、
$t = 0$(いま!)しか人は味わうことができない。



時間は未来から流れてくるとはどういうことか

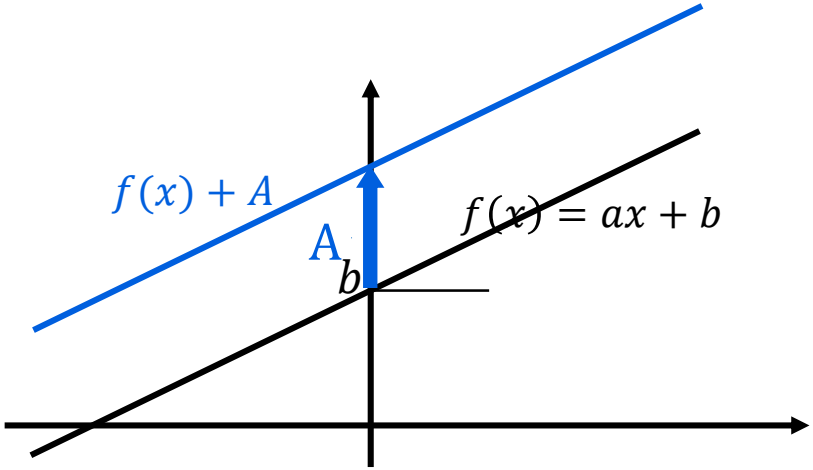
そうすると、常に時間は「いま」に対して、函数が未来から流れてくるということになる。

人間を中心とした時間座標系では、
時間軸でいうところの、未来から時間は現在に流れてくる。

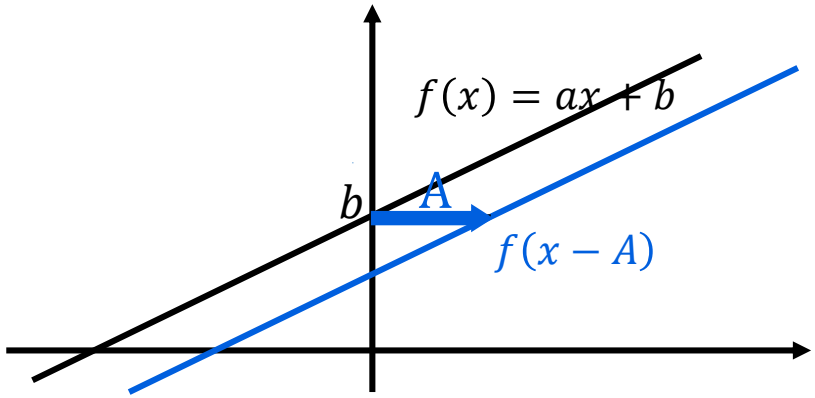


直線を上下左右に操作する

いま、以下のようにすれば直線を操作できることが分かりました。



$f(x)$の図を、Aだけ上に動かすには、
$f(x)+A$ にすればよい。

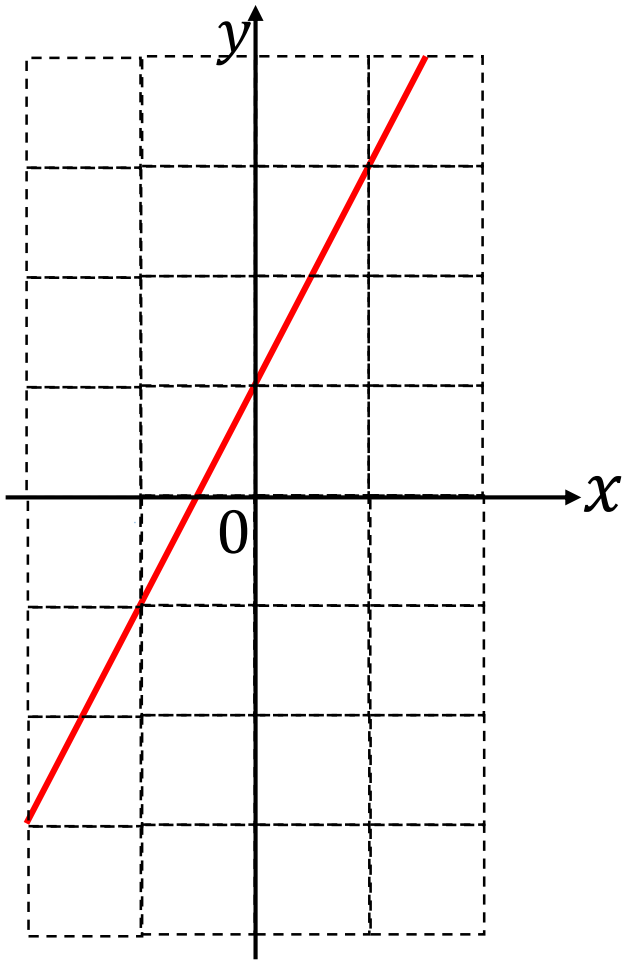


$f(x)$の図を、Aだけ右に動かすには、
$f(x-A)$にすればよい。

$f(x)$に「いろいろ」手を加えることで、直線は操作できそうですね!
では、$f(-x)$や$f(Ax)$はどうなりそうでしょうか？

$f(-x)$を考える：迷った時は、具体例

$f(-x)$について、考えてみましょう。
$f(x) = 2x + 1$という具体例の時、どうなるでしょうか？

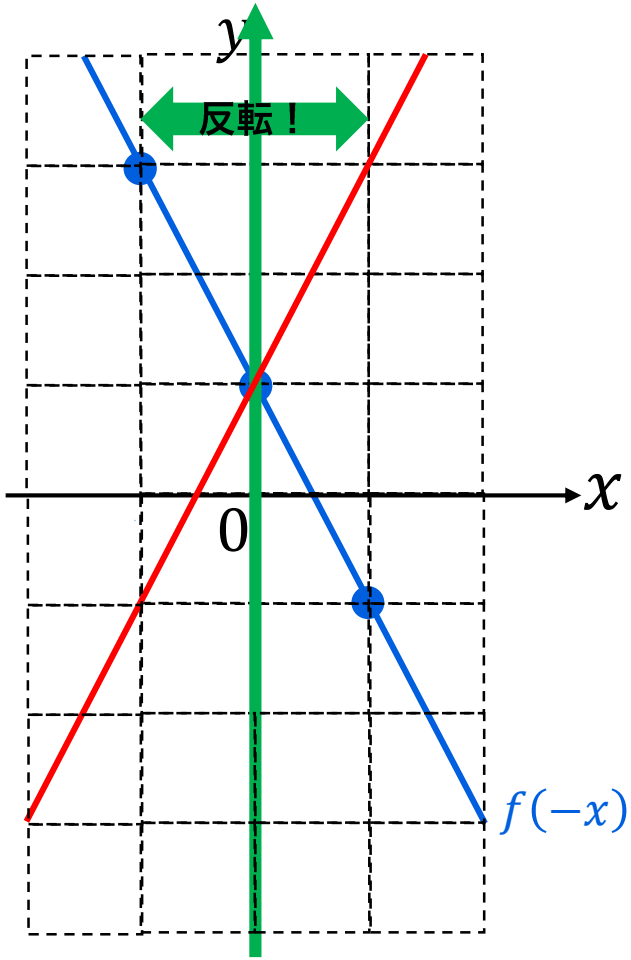


$f(x) = 2x + 1$の時、
$f(-x) = 2(-x) + 1$なので計算して展開すると
$f(-x) = -2x + 1$となります。

これを、グラフに描くとどうなるでしょうか？

迷った時は、具体例

$f(-x) = -2x + 1$について、代入して考えてみましょう。



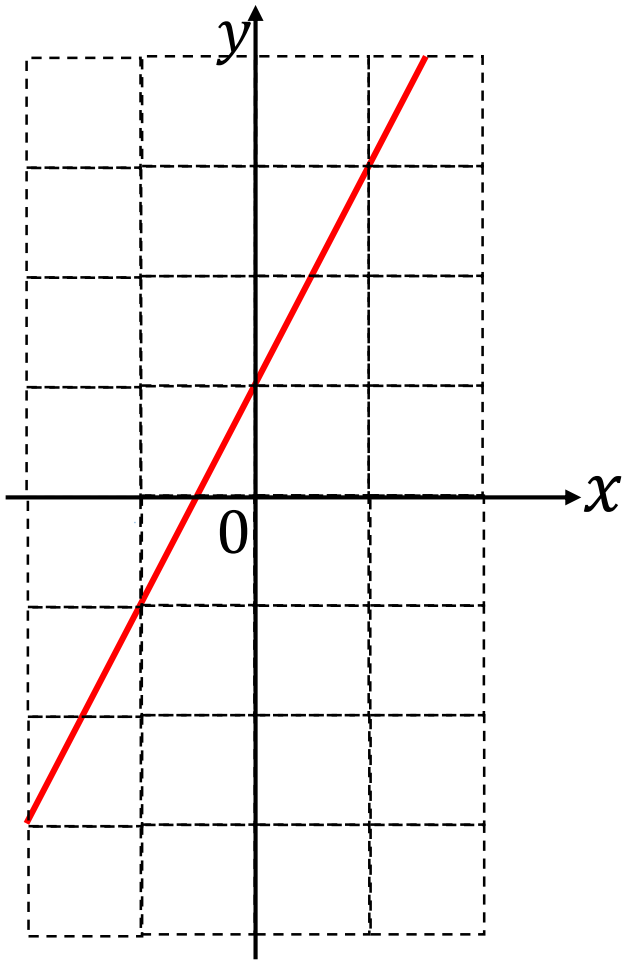
$x = -1$の時、 3
$x = 0$の時、 1
$x = 1$の時、 -1

となりそうです。

$f(-x)$は、$f(x)$を、 y軸を対称軸として
反転させたもの、と言うことができそうです。

$f(Ax)$を考える：迷った時は、具体例

$f(Ax)$について、考えてみましょう。
$f(x) = 2x + 1$という具体例の時、どうなるでしょうか？



$f(x) = 2x + 1$の時、
$f(Ax) = 2Ax + 1$となります。

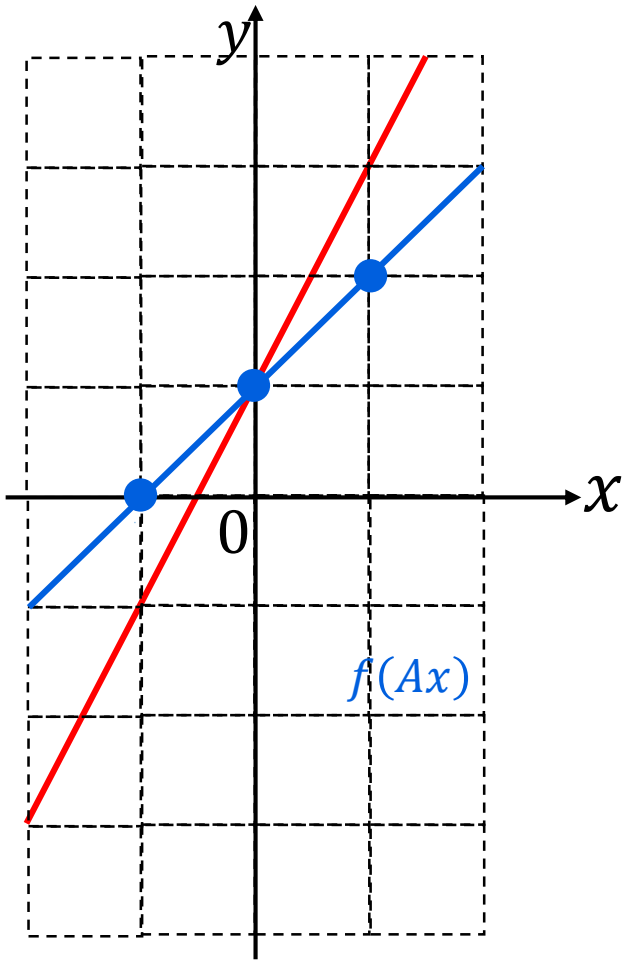
例えば、Aが$\frac{1}{2}$の時、

$$f(Ax) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = 2 \times \frac{1}{2} \times x + 1 = x + 1$$

となります。
これを、
グラフに描くとどうなるでしょうか？

$f(Ax)$を考える：迷った時は、具体例

$f\left(\frac{1}{2}x\right) = x + 1$について、代入して考えてみましょう。



$x + 1$のグラフは、代入してみると

$x = -1$の時、 0
$x = 0$の時、 1
$x = 1$の時、2

となりそうです。

$f(Ax)$は、$f(x)$を、 $(0, b)$を中心に
y軸方向にA倍拡大したもの
と言うことができそうです。

コラム：数学では「小は大を兼ねる」

数学では、何か法則を見出そうとする時、

「小さな数で実験してみる」ということを良くやります。

「一般化」について触れたコラムでも、
数学は「すべて」を表現したがる、という話をしました。

「すべて」成り立つなら、小さな数でも成り立ちます。

だから2,3,5といった数を「とりあえず」式に入れてみると、
理解が深まることがあります。

コラム：数学では「小は大を兼ねる」

「2,3,5」と、いま書きました。

1だと、1倍しても、変化が見えないことが多いです。
だから避けます。

4は、2が2倍されたのか、自乗されたのかが、
分からないので避けます。

逆に、分数がたくさん出てきそうな式では、
60(2,3,4,5,6,10で割り切れる)を代入してみると
計算がラクになることがあります。

ちゃんとわかる函数　その２
「函数」の価値は？

函数の書き方

これまで見てきたように

$$f(x) = ax + b$$

というのは、単に(数学をやるみんなが分かりやすいように)
そう書きましょう、という「お約束」に過ぎません。

だから、同じ意味のことを

$$\mathrm{g}(x) = ax + b$$
$$f(y) = ay + b$$
$$f(x) = Ax + B$$

のように書くことができます。

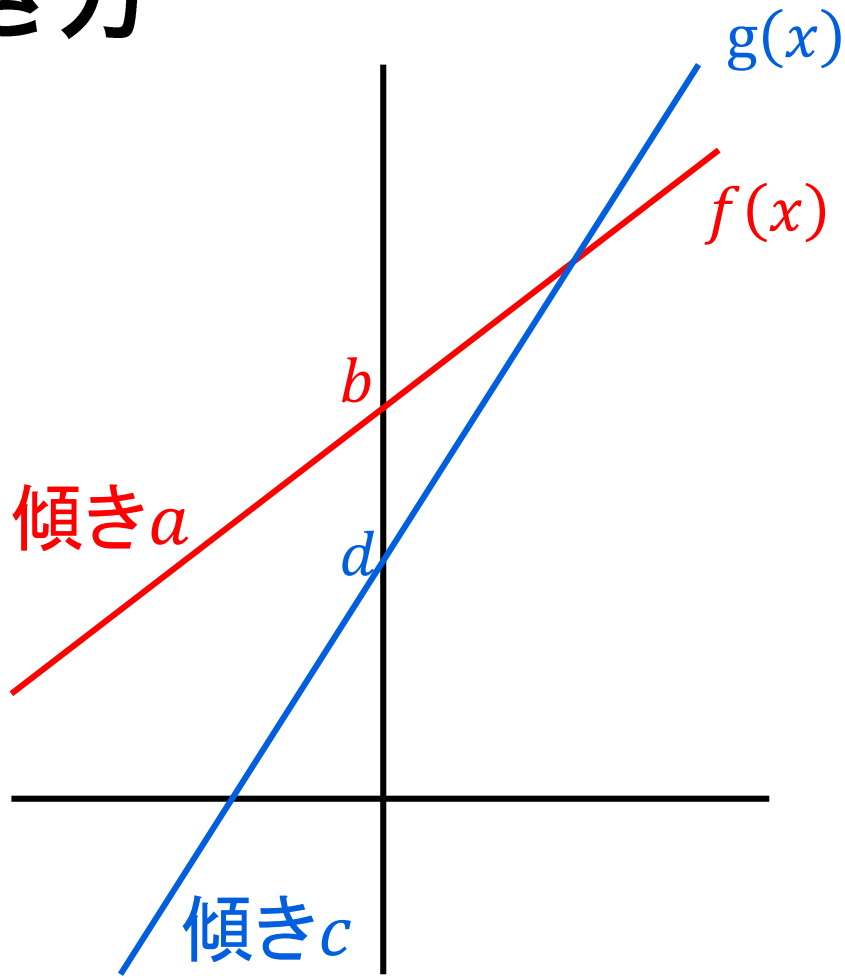
function の fでf(x)とか、
そういうお約束レベルの話でしたもんね！

函数の書き方

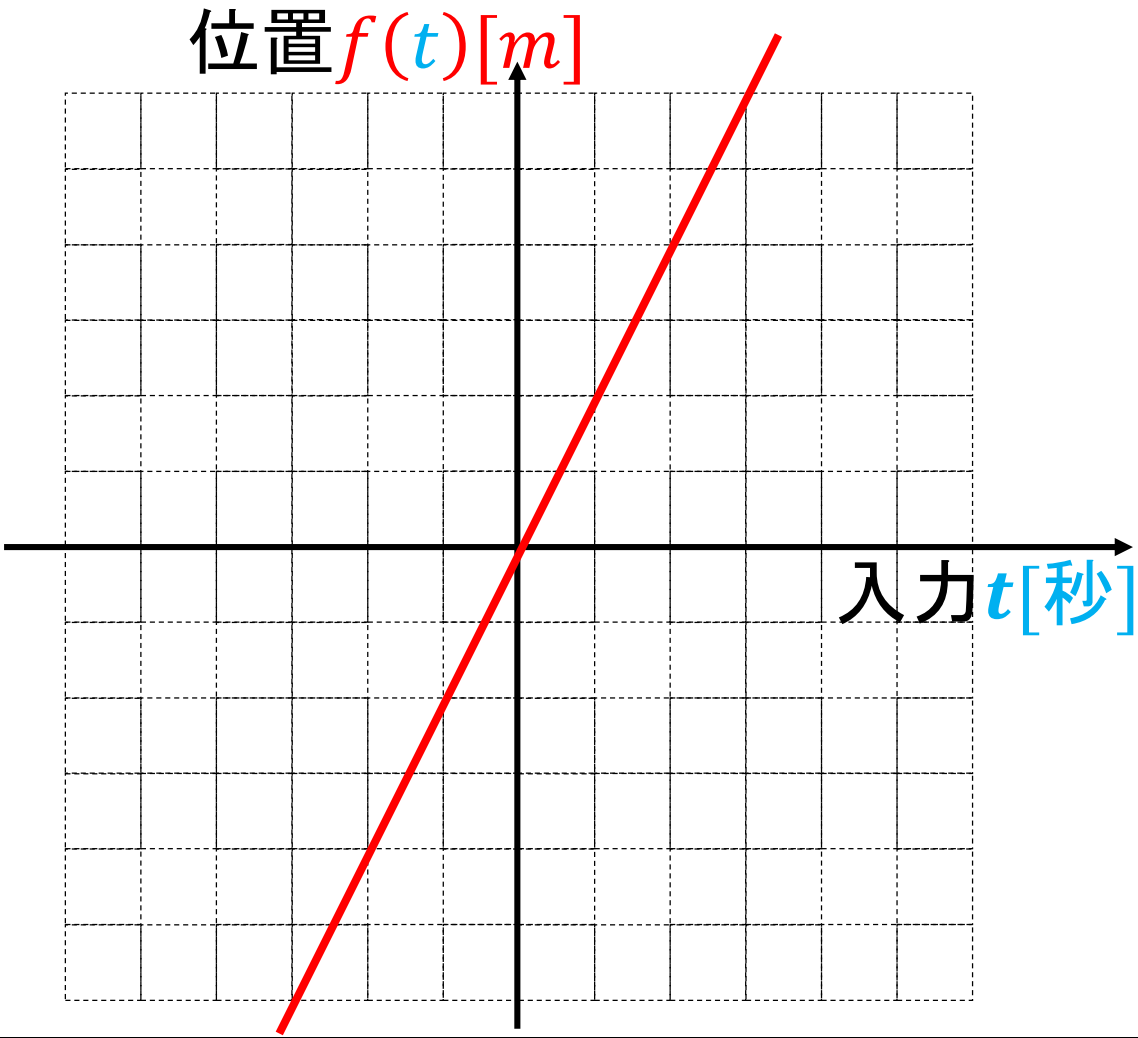
たとえば
一次函数がふたつあるとき、
それぞれの函数を

$$f(x) = ax + b$$
$$g(x) = cx + d$$

のように書くことができます。



物理の場合は数学と違って「物理単位」がつきます。物理単位とは、例えば秒とかメートルのことです。



位置を、時間tの函数として

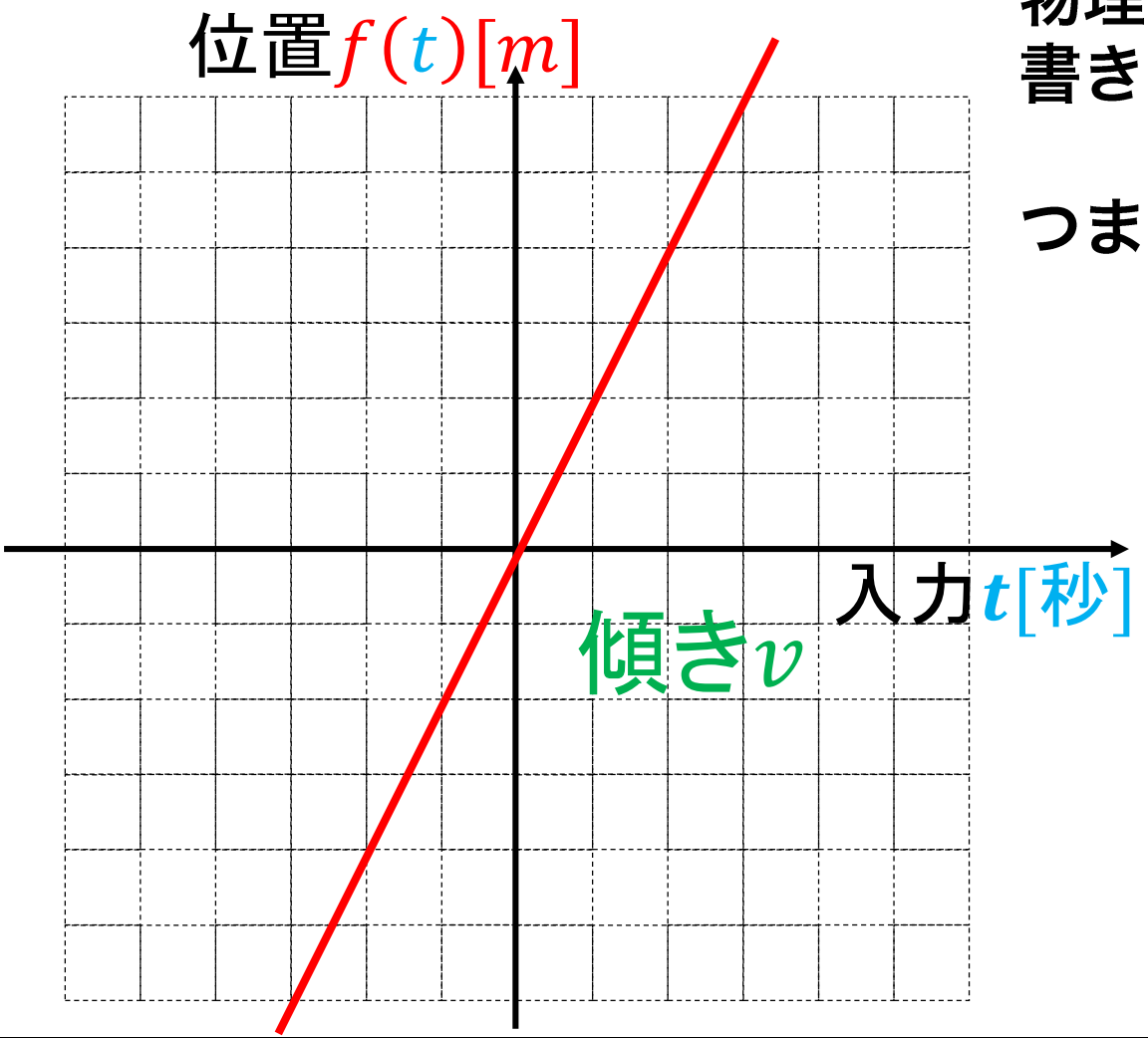
$$位置f(t) = 2t$$

のように書くことができます。
位置が時間の函数なので、
xの代わりにtを使っています。

分からなくなった時は、いつでも
簡略化する前に戻ればいいです。

この函がもつ機能は、
「時間tを入れると、
位置を教えてくれる機能なんだ」

位置と速度で学ぶ函数



物理では速度を$v(velocity)$と書きます。

つまり、

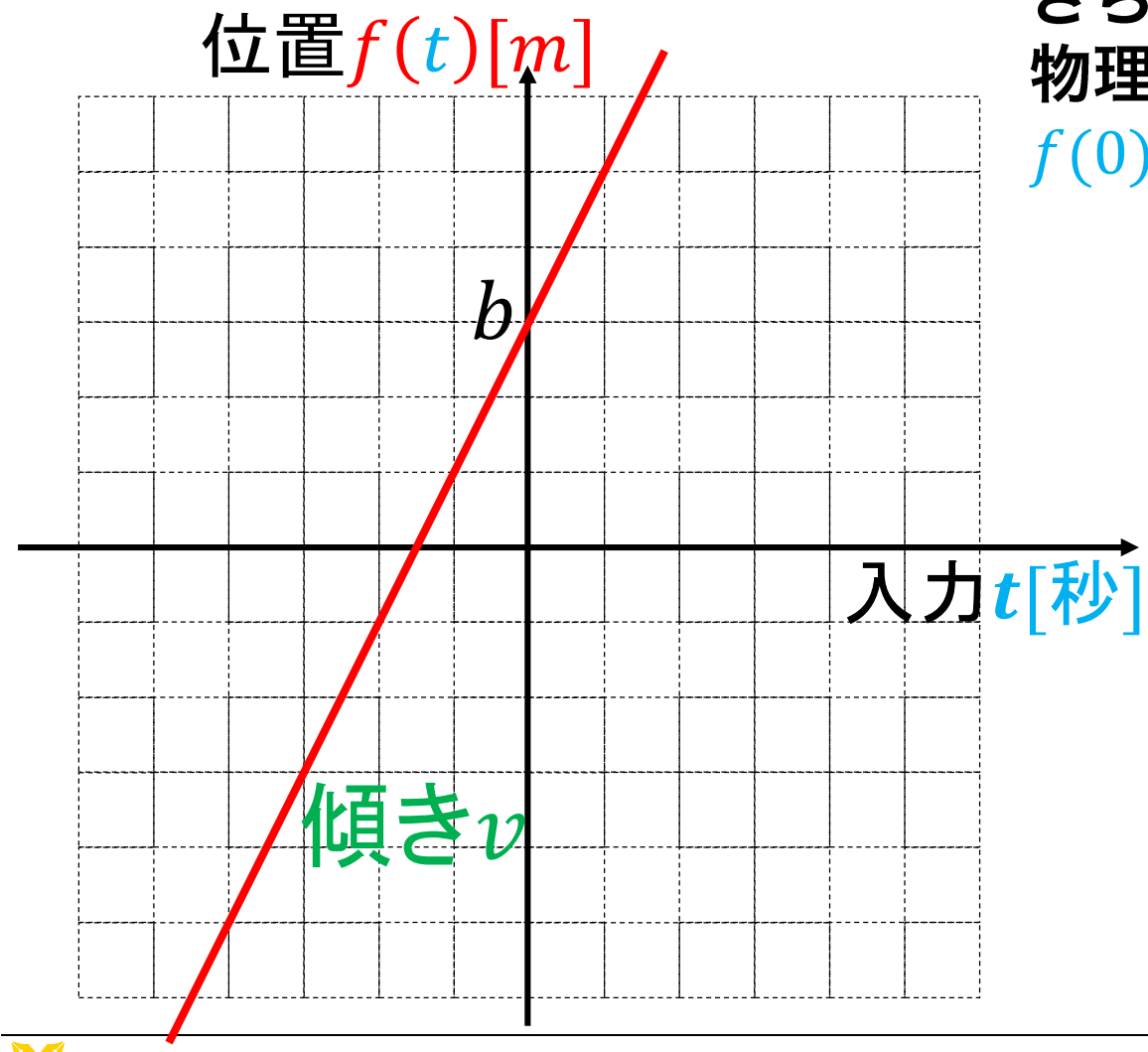
$$\text{位置}\ f(t) = vt$$

のように書くことができます。

速度$v = 2$の時、
左のグラフになります。

速度vの単位は[m/s]
メートル毎秒を使います。

位置と速度で学ぶ函数



さらに左図のように、
物理の場合も常に
$f(0) = 0$とは限らないはずです。

函数 $f(x) = ax+b$
と対応させてみると
位置$f(t) = vt+b$

のように
書くことができます。

この時、bが意味するのは
$t = 0$の時に居た場所、
すなわち<u>初期位置</u>です。

位置と速度で学ぶ函数

一度、整理しましょう。これまで、位置 $f(t) = vt + b$
と書いていました。

物理の習慣では、
位置をxと書き、　単位は [m](メートル)です。
時間を$t(time)$と書き、　単位は [s](秒)です。
速度を$v(velocity)$と書き、単位は[m/s](メートル毎秒)です。

数学の習慣で、函数をfと呼んでいましたが、
物理をやりたいので、この$f(t)$を$x(t)$に単に書き直します。
また bは初期位置なのでx_0と書くことにします。

するとこうなります：位置 $x(t) = vt + x_0$

コラム：物理学における「初期条件」

物理学では「どんなシチュエーション？」
を考えることが、大事でした。

シチュエーションを考える時
「どんな時が、そもそものスタートか？」という、
時刻t=0(開始時)における条件を確認することを大事にします。

この条件を「初期条件」と呼びます。

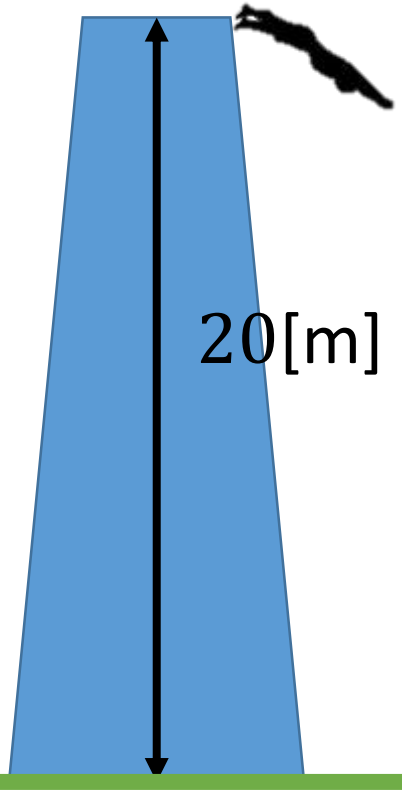
$t=0$の時のxの値という意味で、x_0のように、
文字の右下に0を附して初期条件を表現します。

コラム：物理学における「初期条件」

例えば、

たかしくんは、
時刻t=0(開始時)のとき、
地上20mから飛び降りました。

という文章題であれば、
$t=0$の時のxの値、$x_0=20[m]$です。



位置と速度で学ぶ函数

いま、　函数 $f(x) = ax + b$

位置 $x(t) = vt + x_0$

のように、
数学的には同じ形式のものに、物理的な意味を付与しました。
数学の慣習である函数fと呼ぶことをやめて、
物理の作法に倣い位置xと呼ぶことにしました。

	数学の習慣	物理の習慣
函数	函数をfと呼ぶ	位置はxと呼ぶ
変数	変数をxと呼ぶ	時間が変数の場合 時間をtと呼ぶ
傾き	傾きをaと呼ぶ	速度をvと呼ぶ
初期条件	Y切片をbと呼ぶ	初期条件をx_0と呼ぶ

位置と速度で学ぶ函数

いま、　函数 $f(x) = ax + b$

位置 $x(t) = vt + x_0$

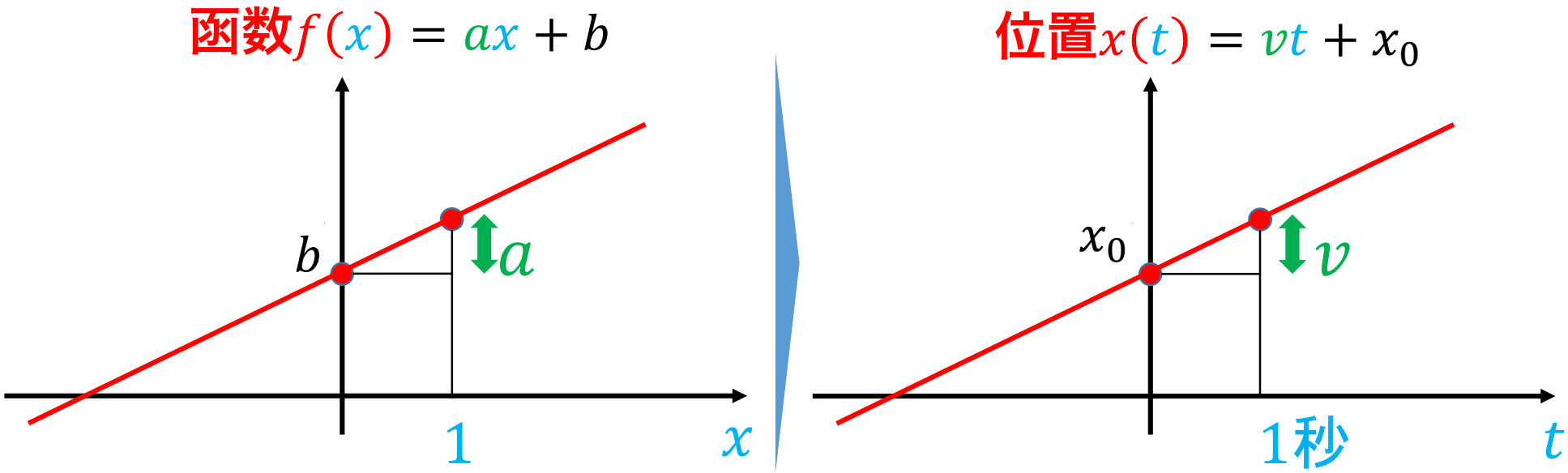
結局、日本語になおすと、
「はじき」しか言っていないことを確認してください。

距離/位置x = 速度v × 時間t + はじめの位置x_0

例えば、次の例題でも確認してみてください。
たかしくんは、はじめ家から3mの地点x_0から出発して、
学校に向かいました。 秒速5mの速度vで、4秒後の時間t 経過した時、
たかしくんは、家から学校に向かって
何メートルの地点位置 $x(t)$ に居るでしょう？

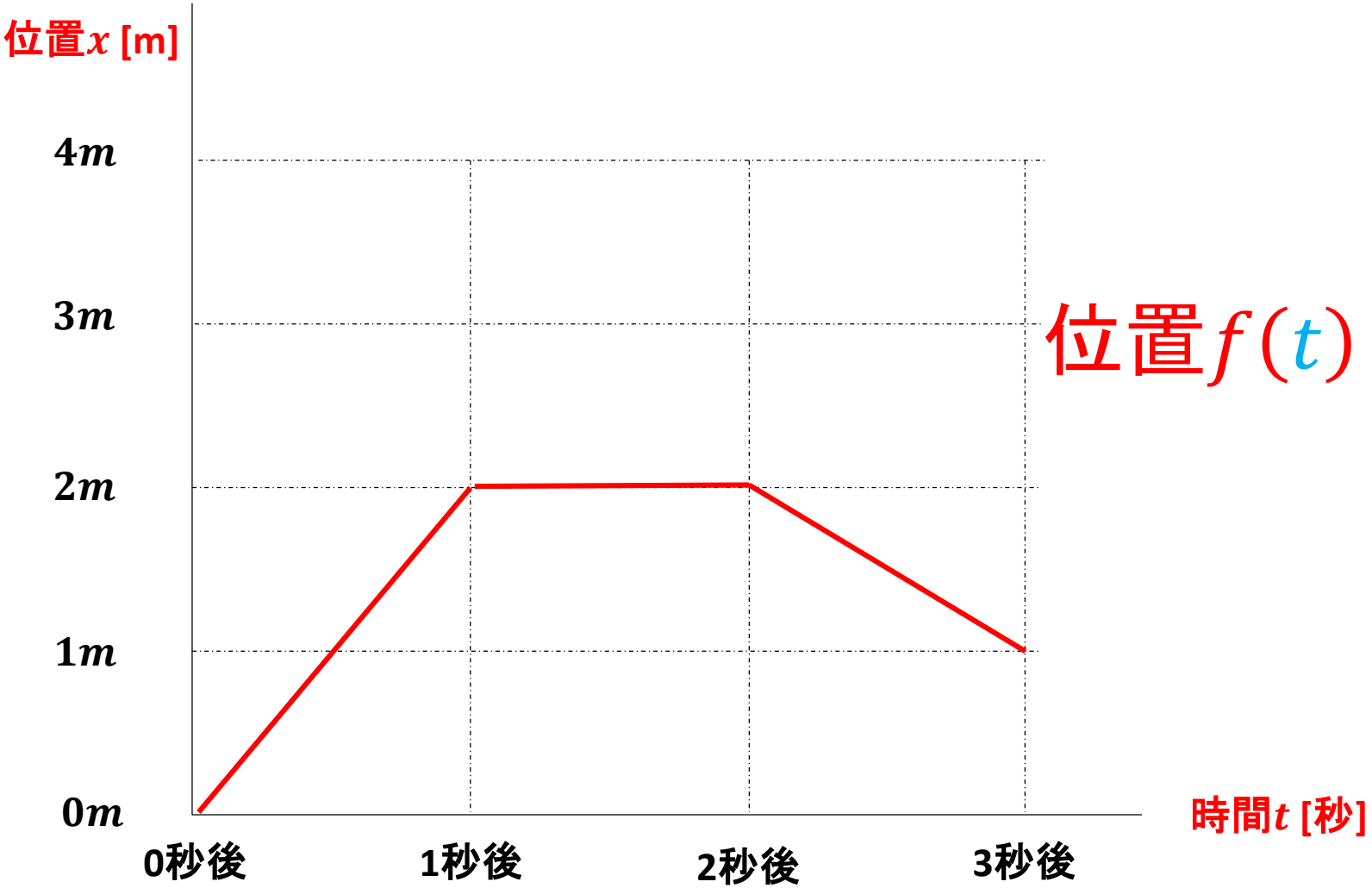
位置と速度で学ぶ函数

つまり、こういうことです。
自然を観察した結果、
位置xというものは(速度vが一定であれば)
時間tの一次函数として扱えることが分かった。

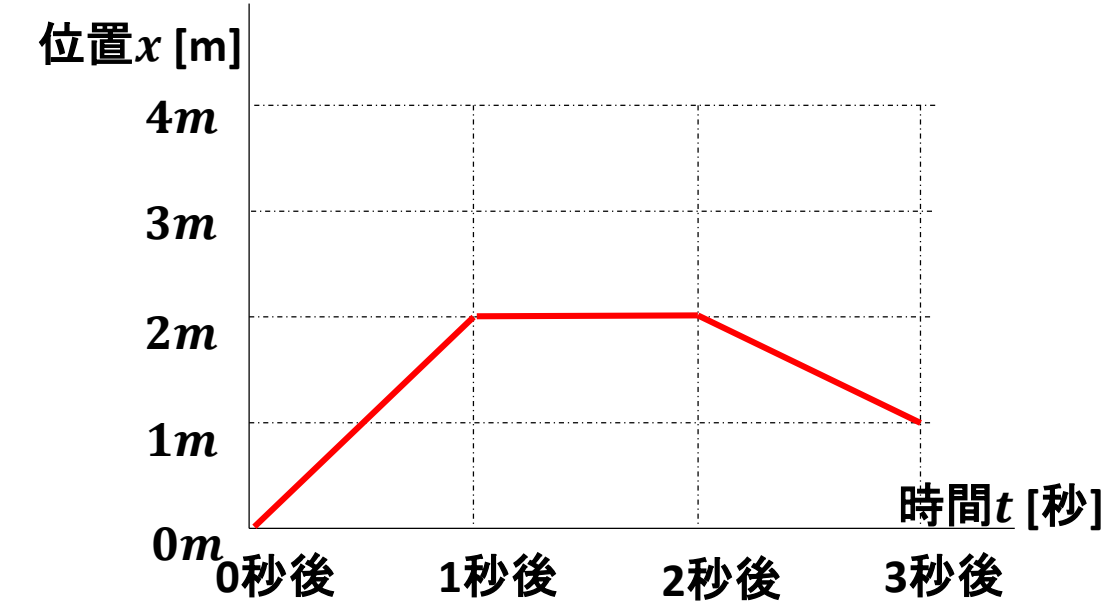


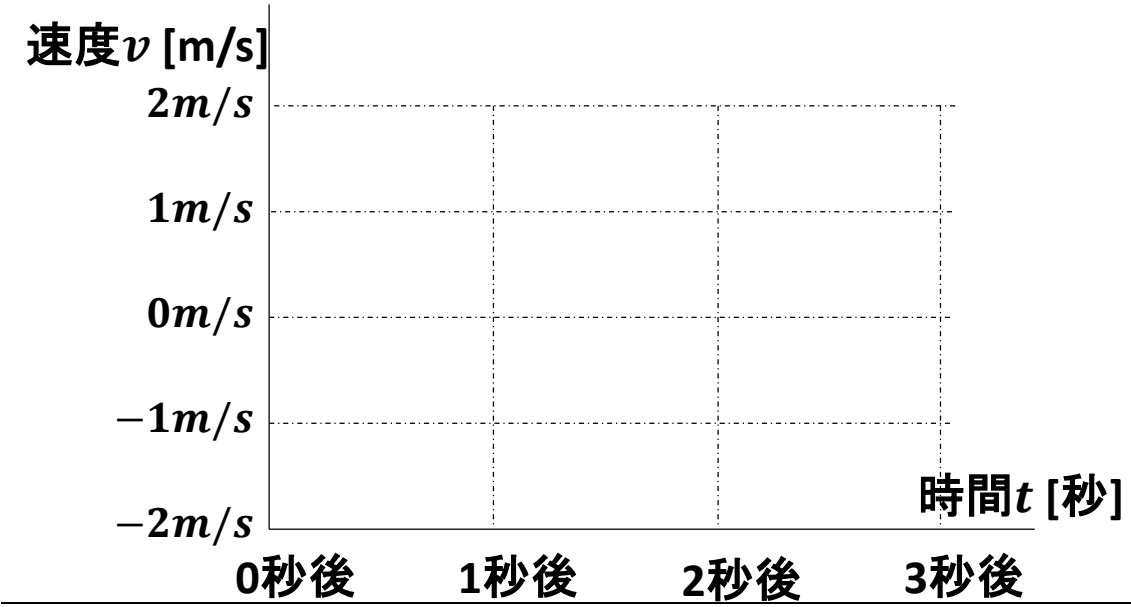
位置と速度で学ぶ函数

さっきの図で確認してみましょう。



$$位置f(t) = vt$$





$x-t$図と$v-t$図の対応

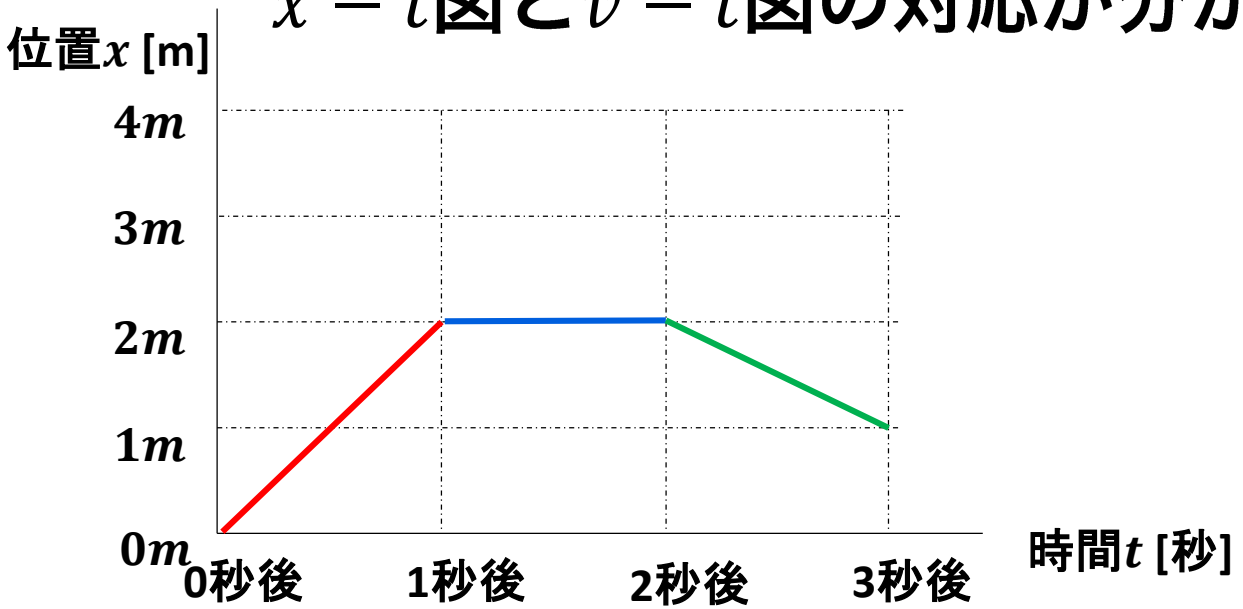
この、上の
$x-t$図に対応する
$v-t$図を描いてみましょう。

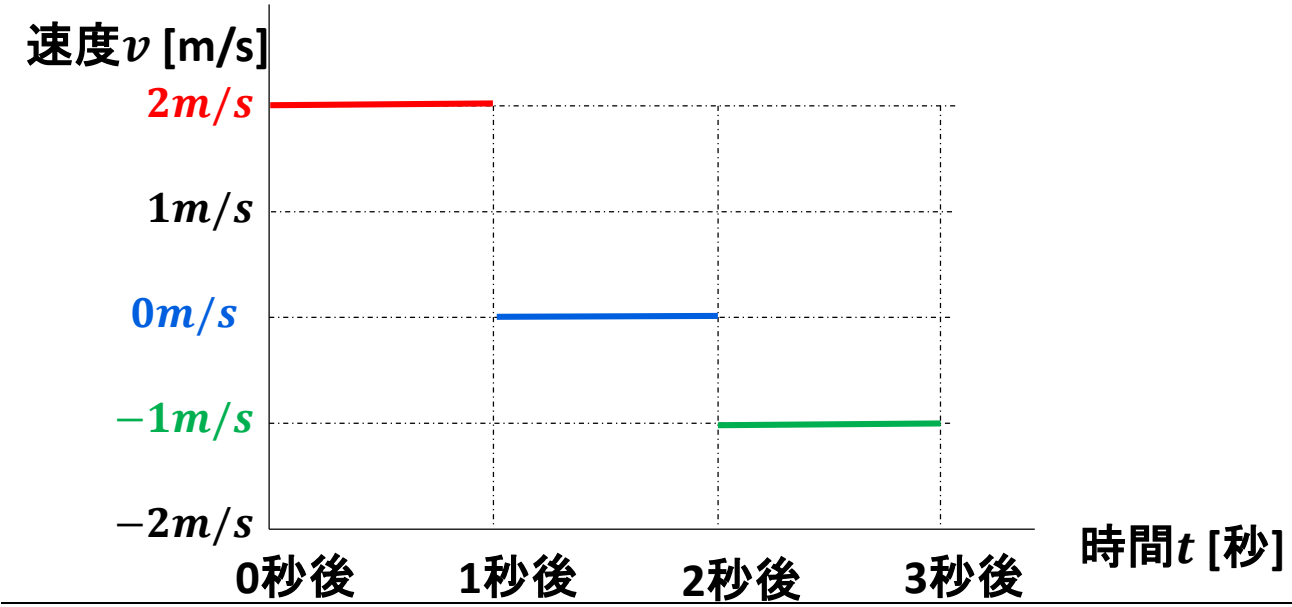
時間ごとの位置を示す
$x-t$図に対し、

時間ごとの速度vを示す図を
$v-t$図と言います。

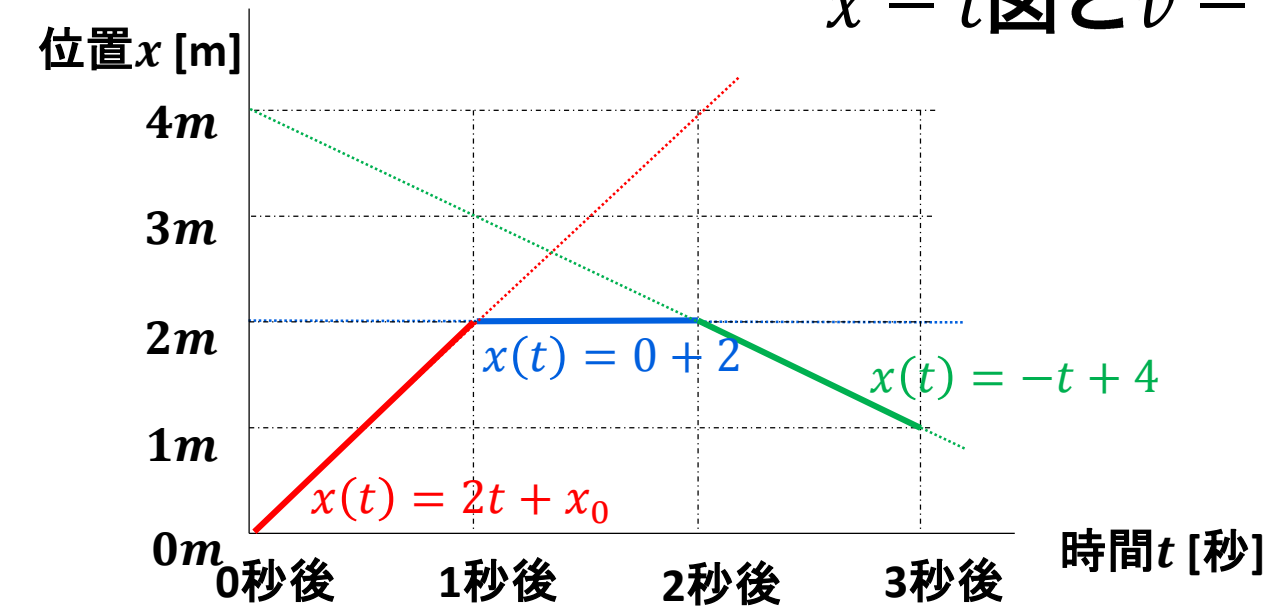
要は「何秒から何秒の間
速さどうだった？」
を示す図です。

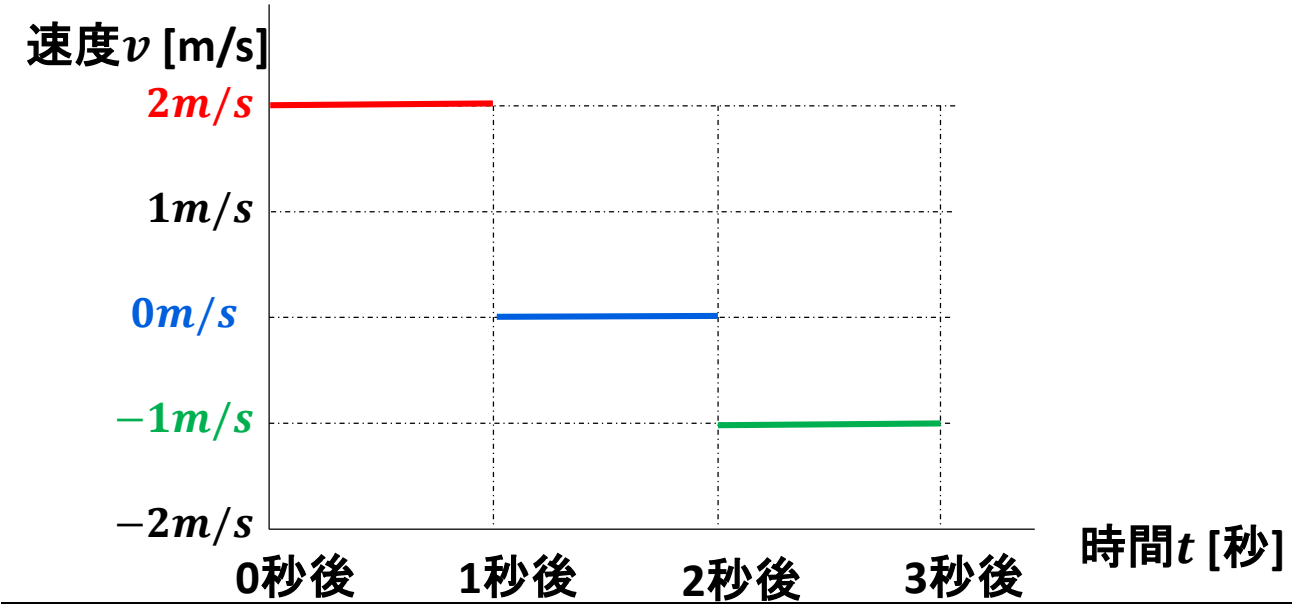
$x-t$図と$v-t$図の対応が分かりますか



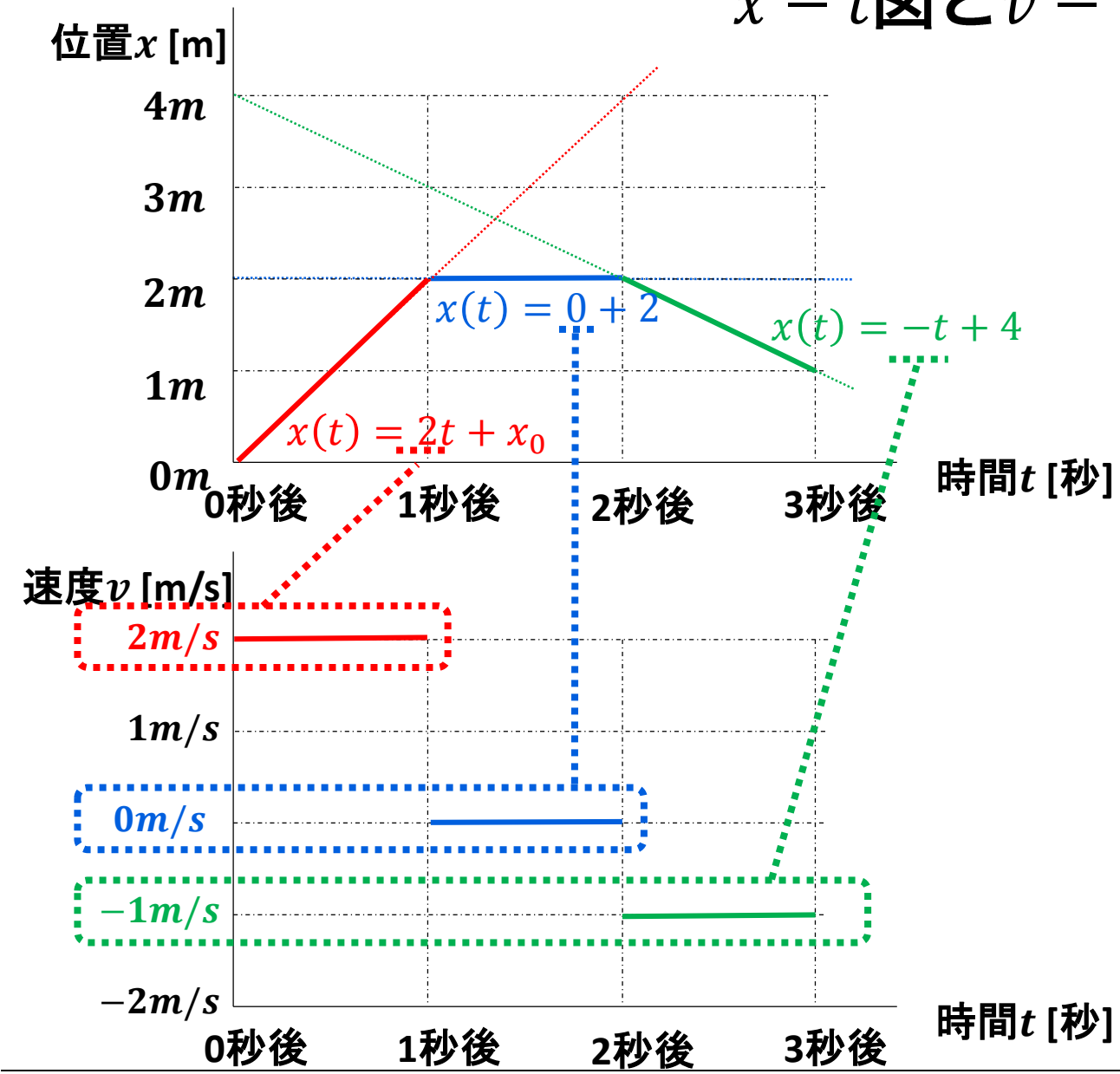


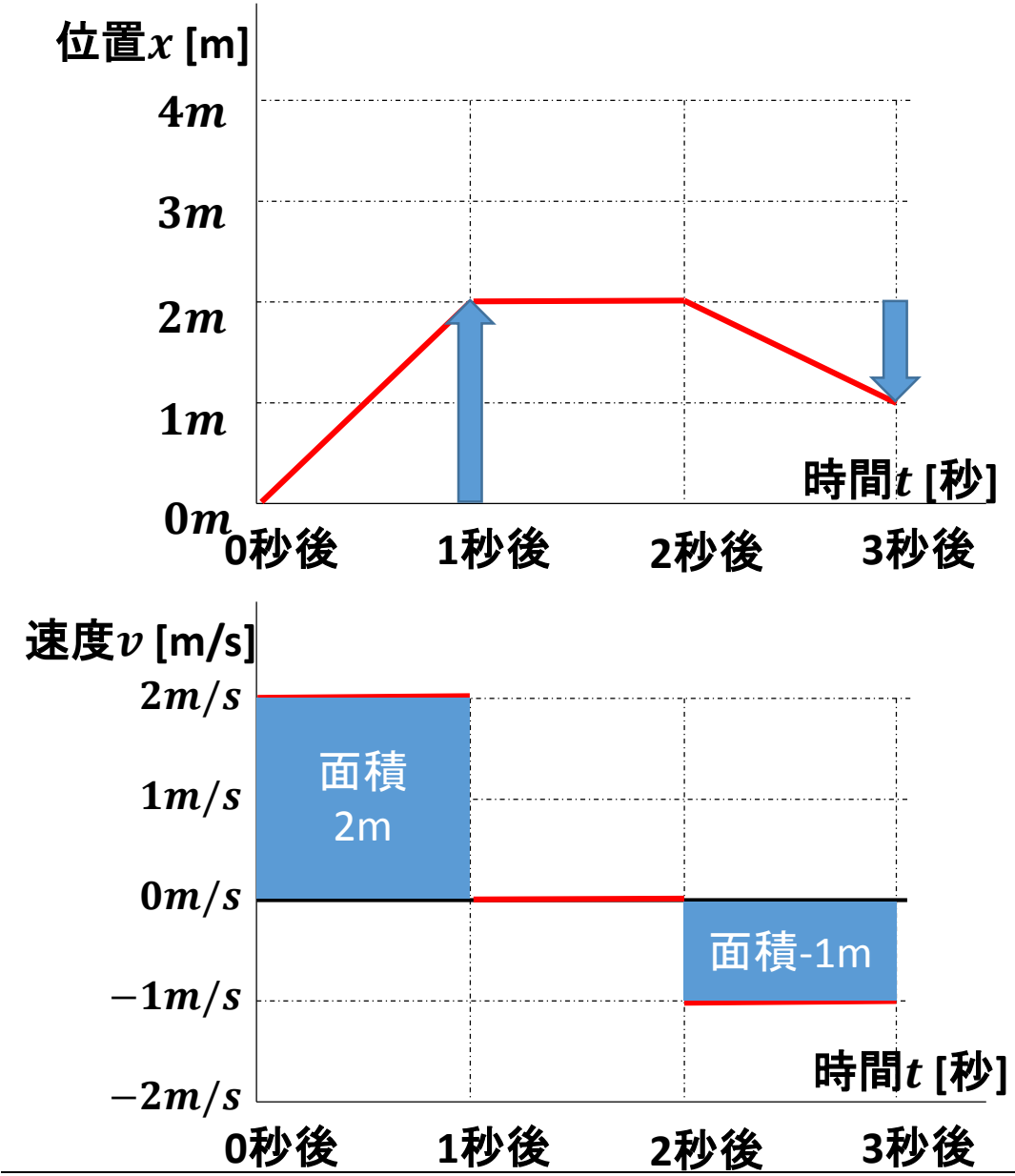
$x-t$図と$v-t$図の対応


位置x [m]
$4m$
$3m$
$2m$
$1m$
$0m$
$x(t)=0+2$
$x(t)=-t+4$
$x(t)=2t+x_0$
0秒後
1秒後
2秒後
3秒後
時間t [秒]


速度v [m/s]
$2m/s$
$1m/s$
$0m/s$
$-1m/s$
$-2m/s$
0秒後
1秒後
2秒後
3秒後
時間t [秒]

$x-t$図と$v-t$図の対応


位置x [m]
$4m$
$3m$
$2m$
$1m$
$0m$
$x(t)=0+2$
$x(t)=-t+4$
$x(t)=2t+x_0$
0秒後
1秒後
2秒後
3秒後
時間t [秒]
速度v [m/s]
$2m/s$
$1m/s$
$0m/s$
$-1m/s$
$-2m/s$
0秒後
1秒後
2秒後
3秒後
時間t [秒]



$x-t$図と$v-t$図の対応

下の
$v-t$図における「面積」が、

上の
$x-t$図での移動距離に
対応することを確認する。

面積を求めるには
「積分」が適しているが、
積分については
後ほど扱う。

「速さ」と「速度」の違いって何でしょう

「速さ」と「速度」の違いって何でしょう

実は「速さ」と「速度」を、物理学では厳密に使い分けています。

- **「速さ」は「大きさ」を持つ量です。**
  例えば 30[km/h]

- **「速度」は「大きさ」と「方向」を持ちます。**
  例えば北から南に30[km/h]

「大きさ」だけの量を「スカラー」
「大きさ」と方向を持つ量を「ベクトル」　　と呼びます。

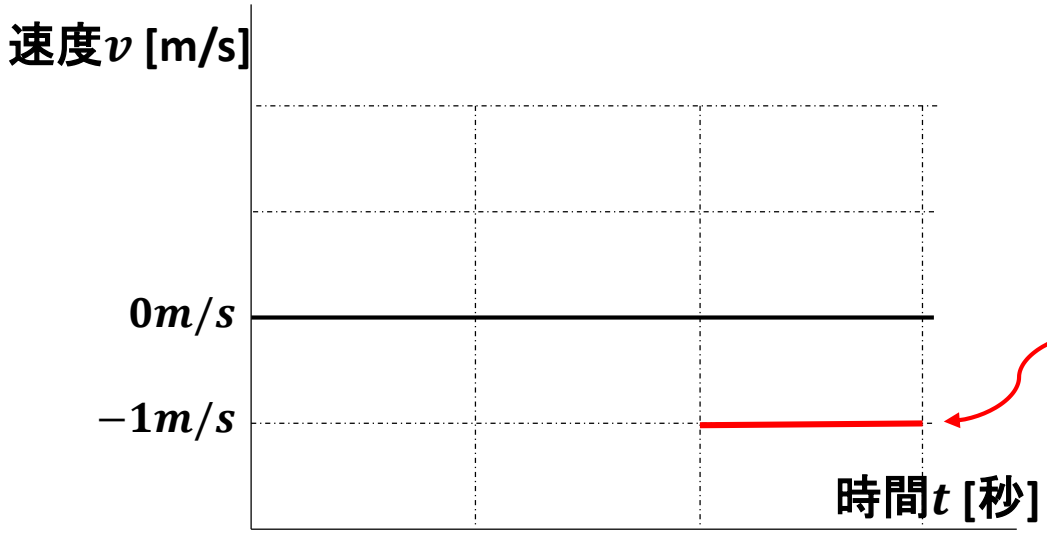
ベクトルの大きさを表現するのに、絶対値記号|　|を利用し、
例えば速度ベクトル$\vec{v}$の大きさを$|\vec{v}|$のように表します。

「速さ」と「速度」の違いって何でしょう

これまで、速度vと言っていたのはですから、「ベクトル」です。
「大きさ」と方向の両方を持つ量です。

ベクトルであることが分かりやすいように、
「→」の記号を使うことがあります。

$\vec{v}$のように書き、ベクトルであることを強調します。

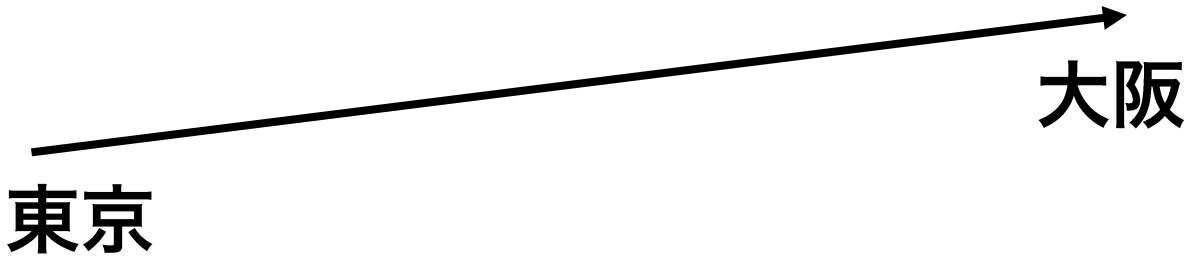


「速さ」は大きさなので、
必ずプラスの値をとります。

「速度」は向きがあるので、
マイナスが存在します。

マイナスの「速度」って何でしょう

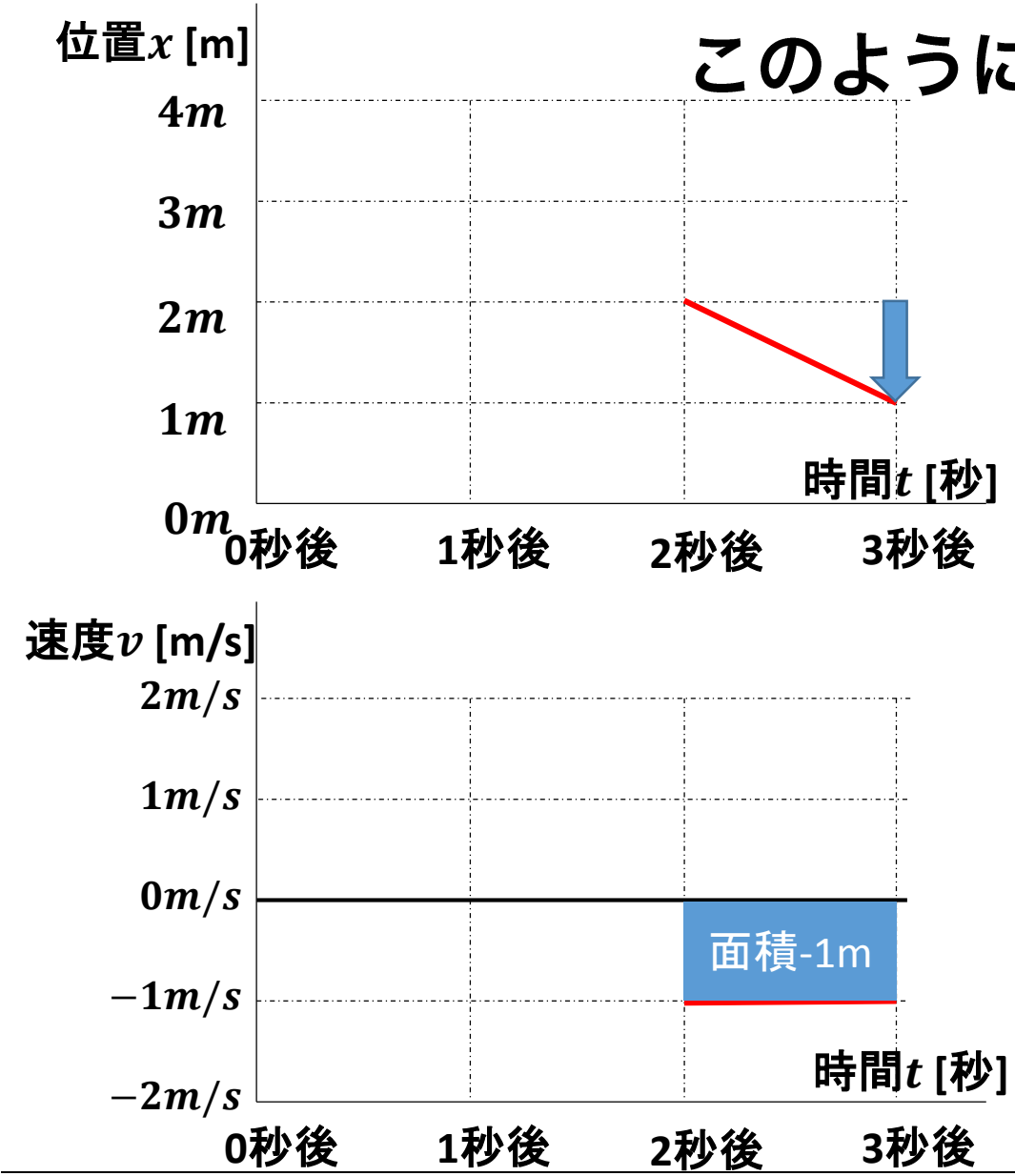
プラスやマイナスは、基準の取り方で変わります。
例えば　東京から大阪に向う方向をプラスに設定してみましょう。



このとき、
東京から大阪へ向う新幹線の速度v_1**は**$200[km/h]$
大阪から東京へ向う新幹線の速度v_2**は**$-200[km/h]$

しかし、速さ$|v_1| = |v_2| = 200[km/h]$**です。**

このように、ベクトルを$|\quad|$**で囲むことで、ベクトルの大きさを表現します。**



このように「方向」も考えたからこそ、

下の
$v-t$図における「面積」も

マイナスの面積として、
$x-t$図での
マイナスの移動距離に
対応させることができます。

スカラーで考えていたら、
向きをいちいちどっち向き？と
考えなくてはいけません。

詳しくは第二章のベクトルで
取扱します。

コラム：物理学における「単位」と「次元」

物理学では「単位」(次元)というものは、とても大事です。

- **例えばm(メートル)という単位は「長さの次元を持つ」と言います。**
- **例えばkg(キログラム)という単位は「重さの次元を持つ」と言います。**
- **例えばs(seconds, 秒)という単位は「時間の次元を持つ」と言います。**

異なる「次元」は、足し算や引き算ができません。
例えば、長さの次元と、時間の次元は足し算ができません。

$$6[\mathrm{m}] + 2[\mathrm{s}] = ???$$

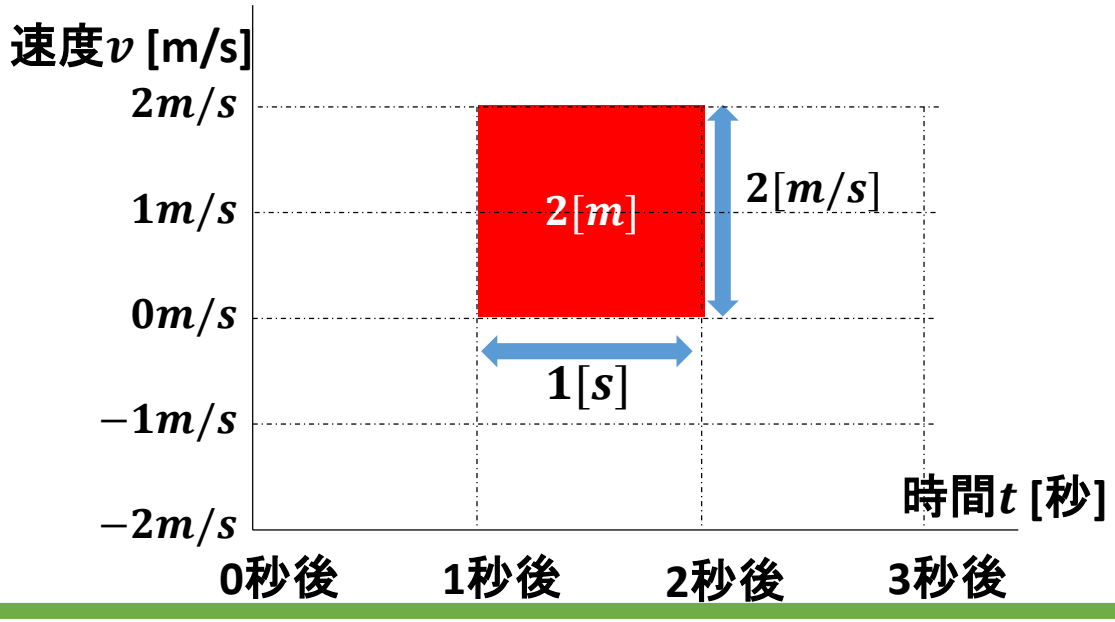
けれど、異なる「次元」でも掛け算や割り算はできます。
例えば、長さの次元を、時間の次元で割り算すると、速さになります。

$$6[\mathrm{m}] \div 2[\mathrm{s}] = 3[\mathrm{m/s}]$$

コラム：物理学における「単位」と「次元」

このように、単位だけで計算をして、次元が適切かどうかを調べることを「次元解析」と言い、その数式やその量の「意味」を把握するのに利用します。

だから、例えば、
横軸が時間の次元、
縦軸が速さの次元のグラフの面積は、[s]×[m/s]なので、
[m]という長さの次元になるわけです。



第一章の復習

- □ 物理は目の前の現象を説明するためのものであることを学んだ
- □ 物理現象の記録方法として、位置と時間を記録する$x-t$図という表記を学んだ
- □ $x-t$図を見て、物理現象がイメージできるようになった
- □ 速度とは、位置変位$\Delta x \div$時間変位Δtという、定義を学んだ
- □ 方程式の意味、方程式を解くことのイメージとその機械的な解き方を学んだ
- □ 函数とは何かを学んだ
- □ １次函数をグラフ上に可視化ができるようになった
- □ １次函数の上下左右への操作ができるようになった
- □ 位置と速度は、等速度運動の場合、位置$x(t) = vt + x_0$で書けることを学んだ
- □ $x-t$図と$v-t$図の関係について学んだ
- □ 「速さ」がスカラー、「速度」がベクトルであることを学んだ