Topgun$_{\mathbf{x}}$ Physics

#1 Classical Mechanics Mastery

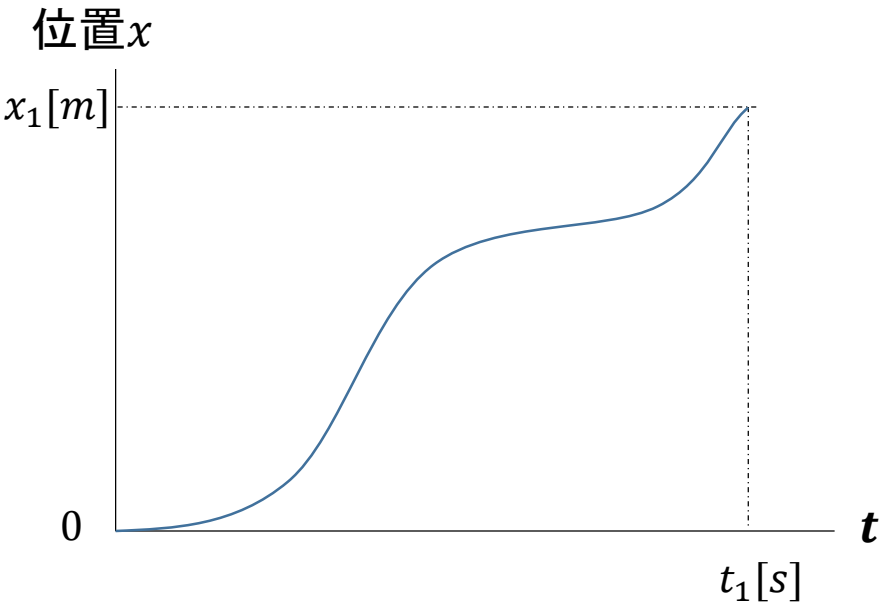
「力学」マスター
第２章 ～微積分学と二次函数～

Ryosuke ISHII

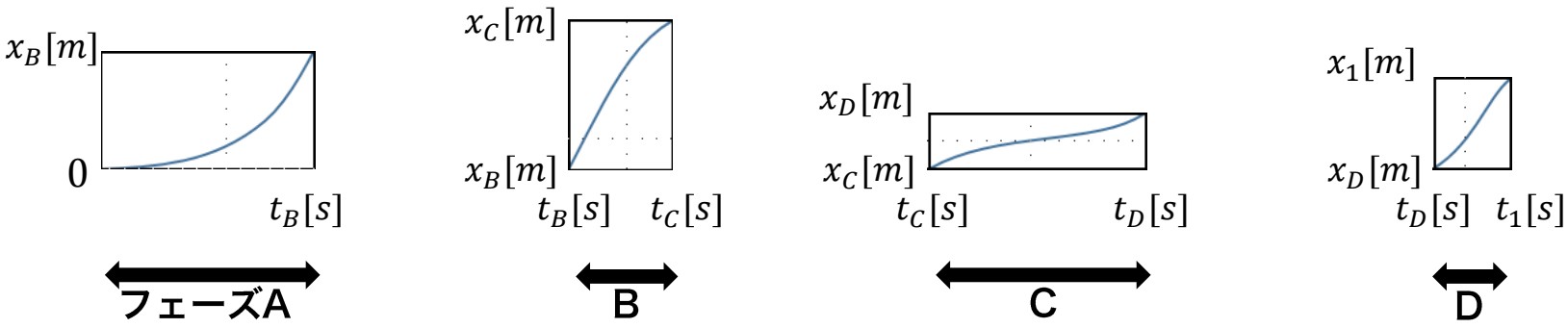
練習問題ワークシート

この$x-t$図の「意味」は、何でしょうか？

$x-t$図は「自然を上手に記録する」するためにある。
ということを、私達は既に学びました。
この記録は何を意味するのでしょうか？日本語で「意味」を記述してみましょう。

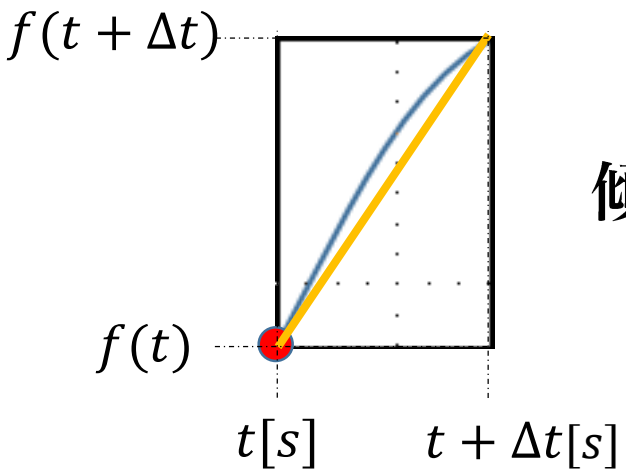


各フェーズに区切った長方形の「フェーズごとの速度」を求めてみましょう。



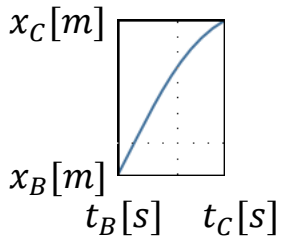
瞬間の傾き＝瞬間速度を数学的に定義してみましょう。

前と同じように、傾きを求めてみましょう。



傾きはどうなるでしょうか？

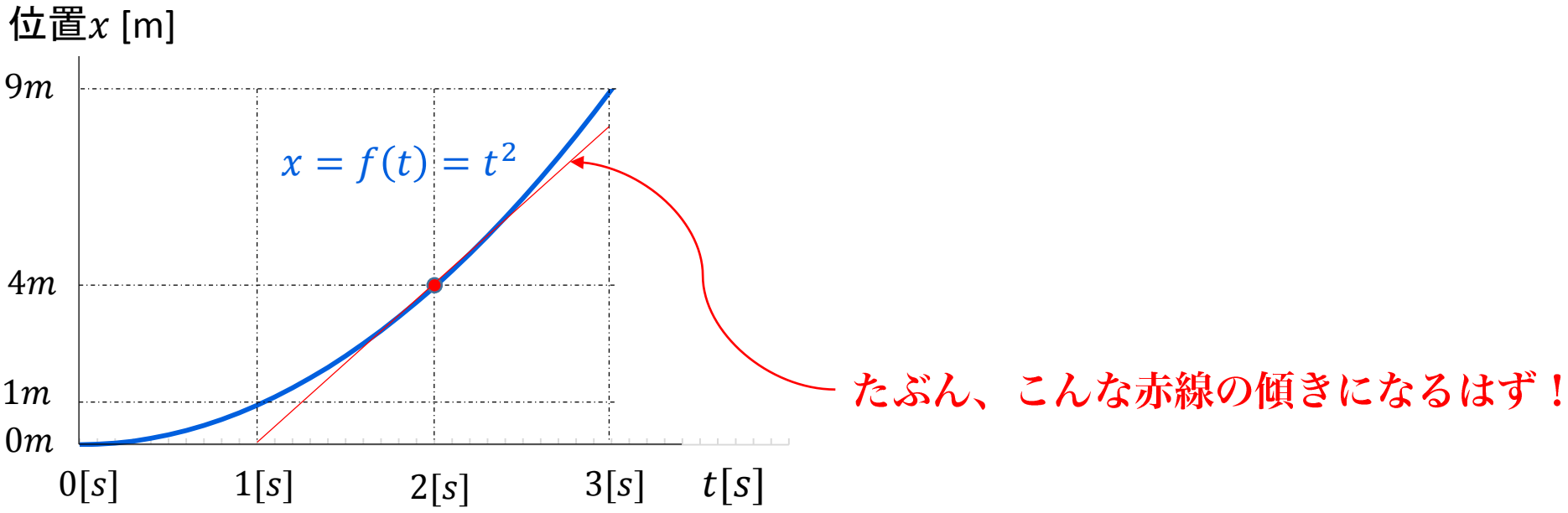
参考：前はこうやりました



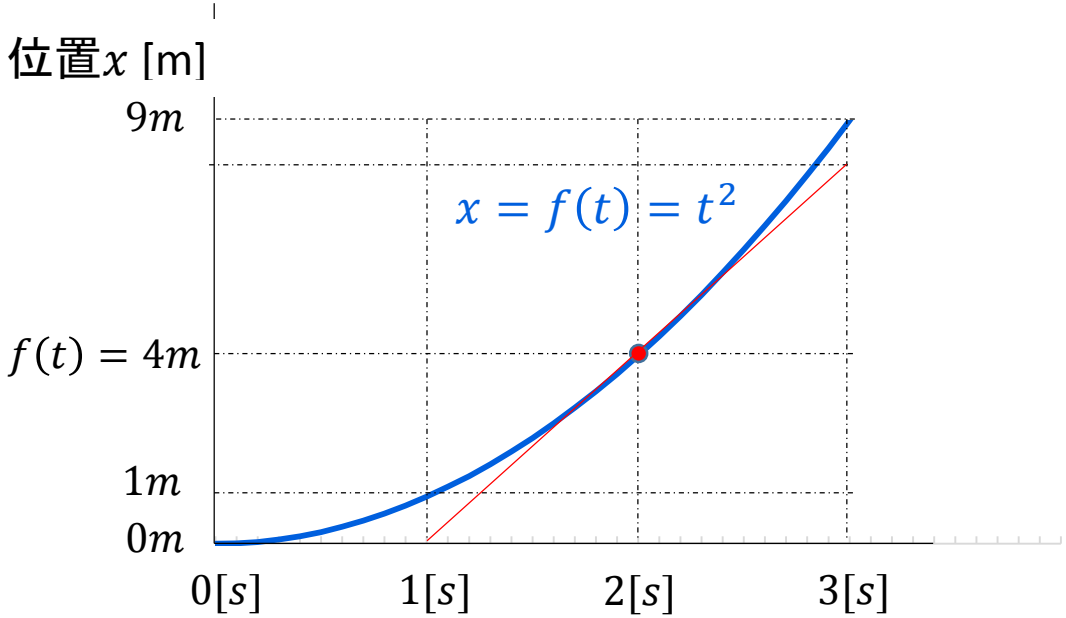
フェーズBの速度$= \dfrac{x_C - x_B}{t_C - t_B}[m/s]$

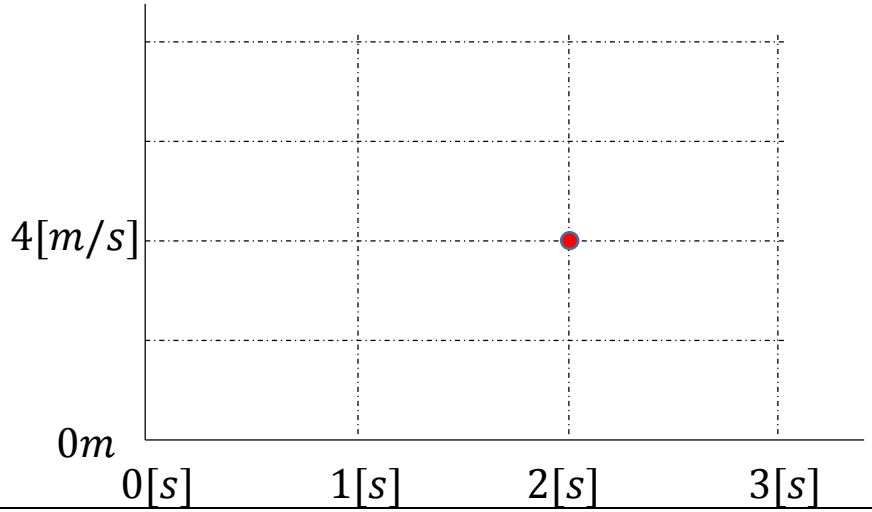
具体的な函数でやってみましょう。

いま、位置$x = f(t) = t^2$の$x - t$図があります。
このとき、 $t = 2[s]$における、瞬間の速さを考えてみましょう。



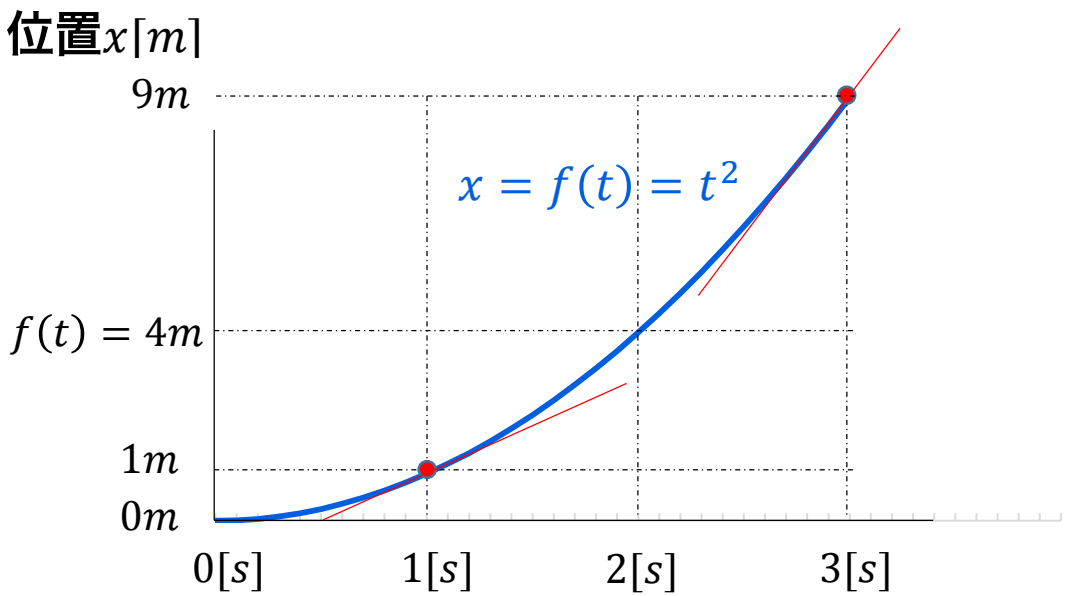
この$x-t$図に対応する$v-t$図を描けますか？

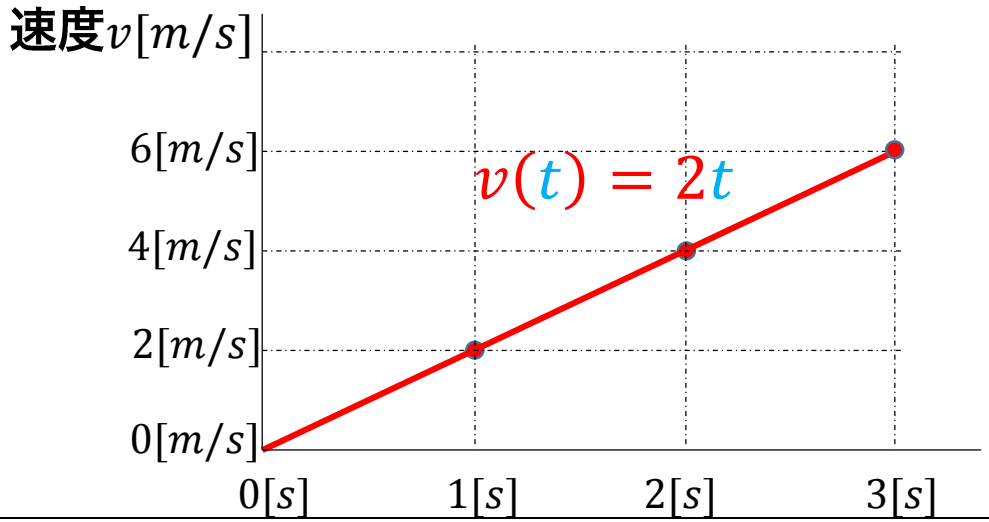




とりあえず$t = 2[s]$の時、
$v = 4[m/s]$であることは
さっき計算したので値を入れてみよう。

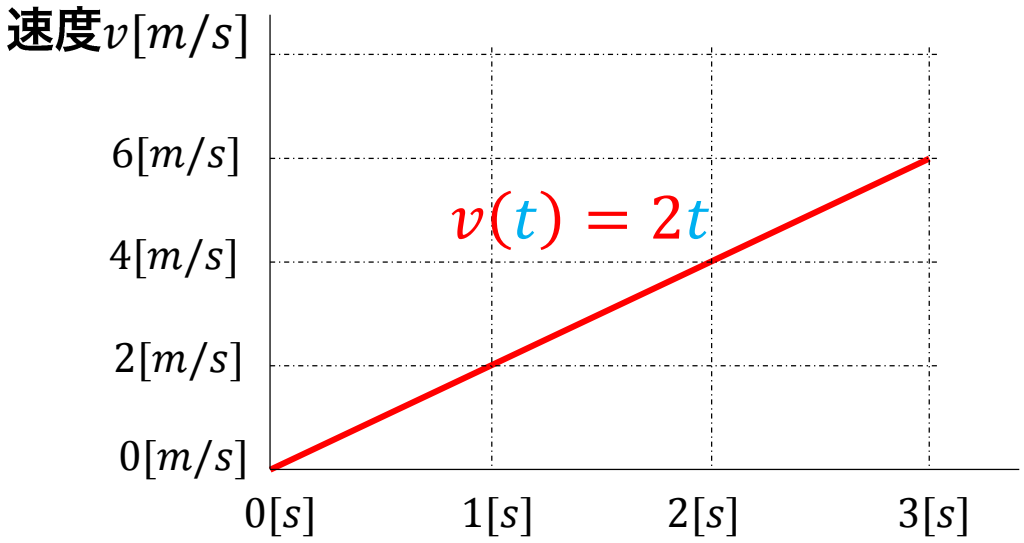
この$v-t$図の意味を日本語で書くと何でしょうか？

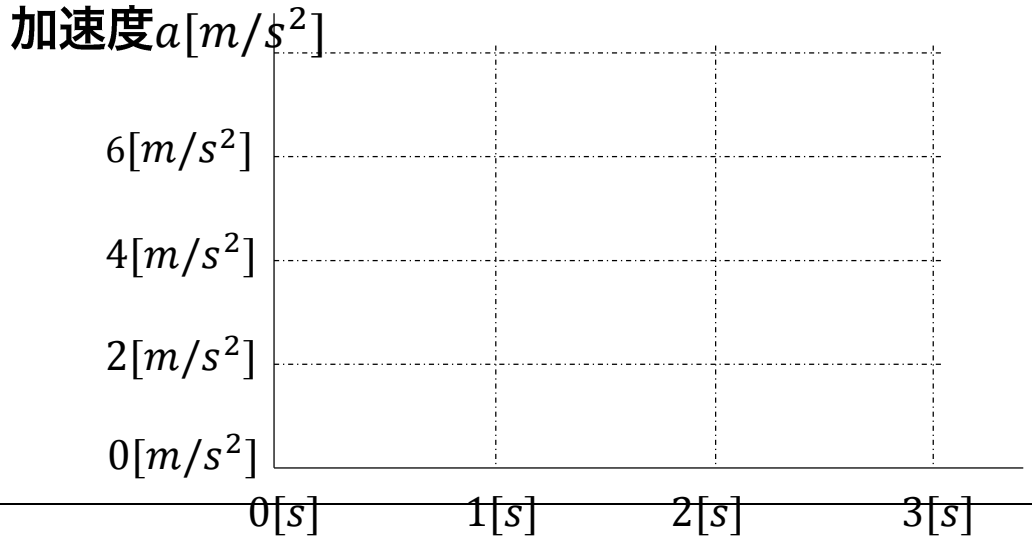




この$v-t$図の意味は？

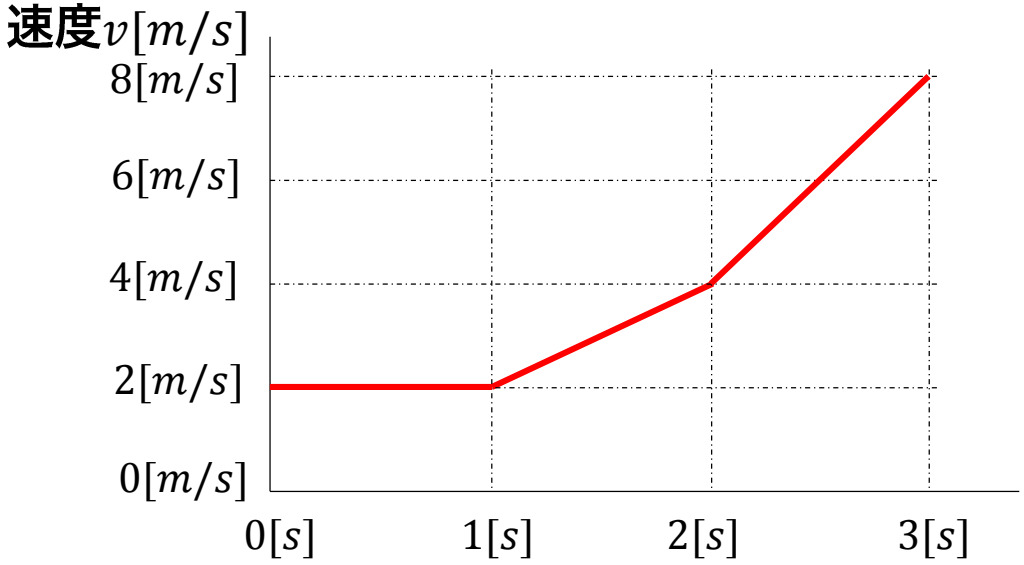
この$v-t$図から$a-t$図を描いてみよう。

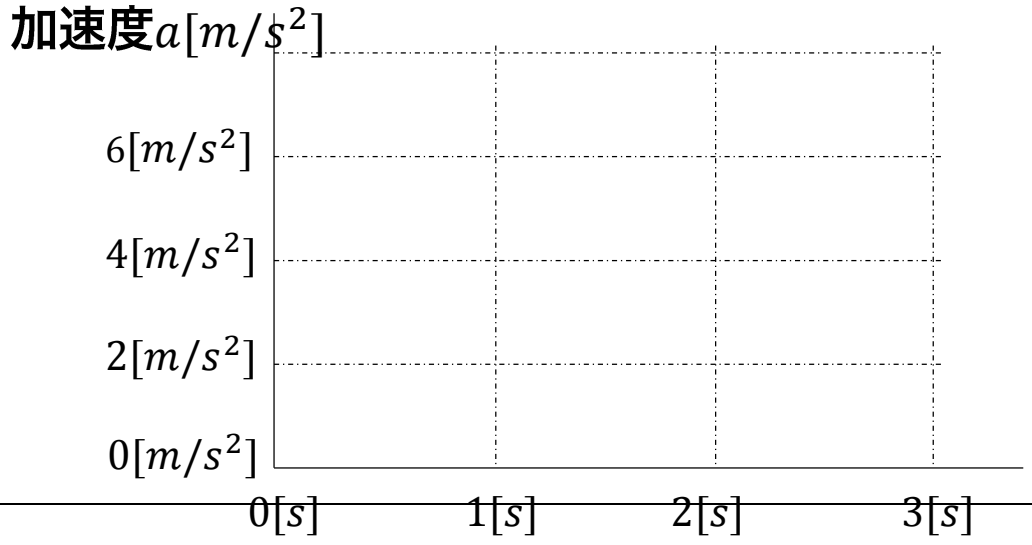




$a-t$図とは、
横軸に時間
縦軸に加速度
をとったグラフのこと。

練習問題：この$v-t$図から$a-t$図を描いてみよう





$(x+\Delta x)^n$を求めよう！小さい数で実験してみましょうか。

$(x+\Delta x)^n$

とりあえず、xをaに、Δxをbに置き換えましょう。
見た目が簡単になるからです。

$(a+b)^n$=???

$n=1$の時、$(a+b)^1=a+b$

$n=2$の時、$(a+b)^2=$

$n=3$の時、$(a+b)^3=$

「函数」って何でしたっけ？

第一章で函数について取り扱いをしました。

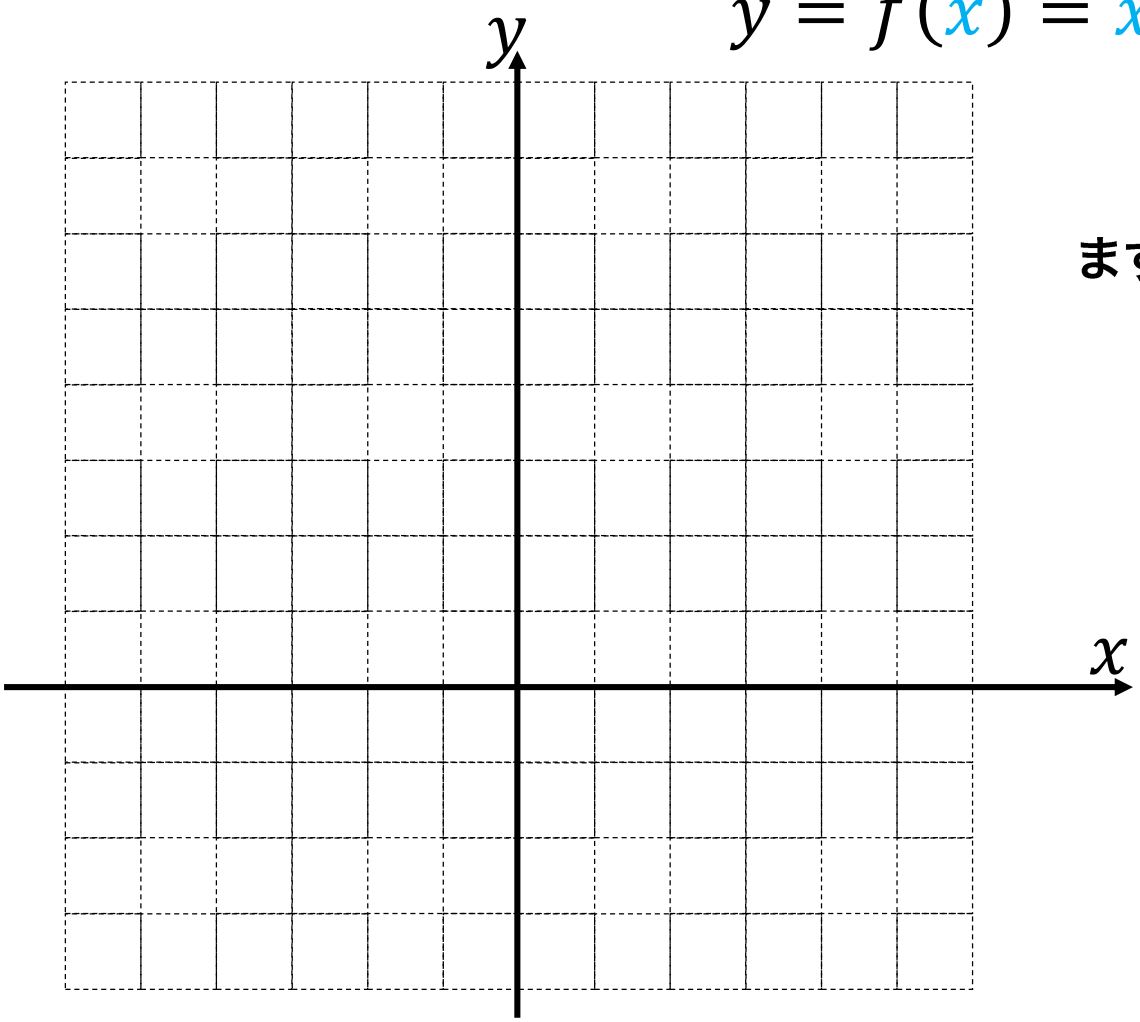
- 函数とは、そもそも何だったでしょうか
- 二次函数とは、どのような特徴を持つ函数でしょうか。

練習問題

「2次函数」を描いてみよう

次の2次函数を描いてみよう

$$y = f(x) = x^2 - 4$$



まずは代入してみよう

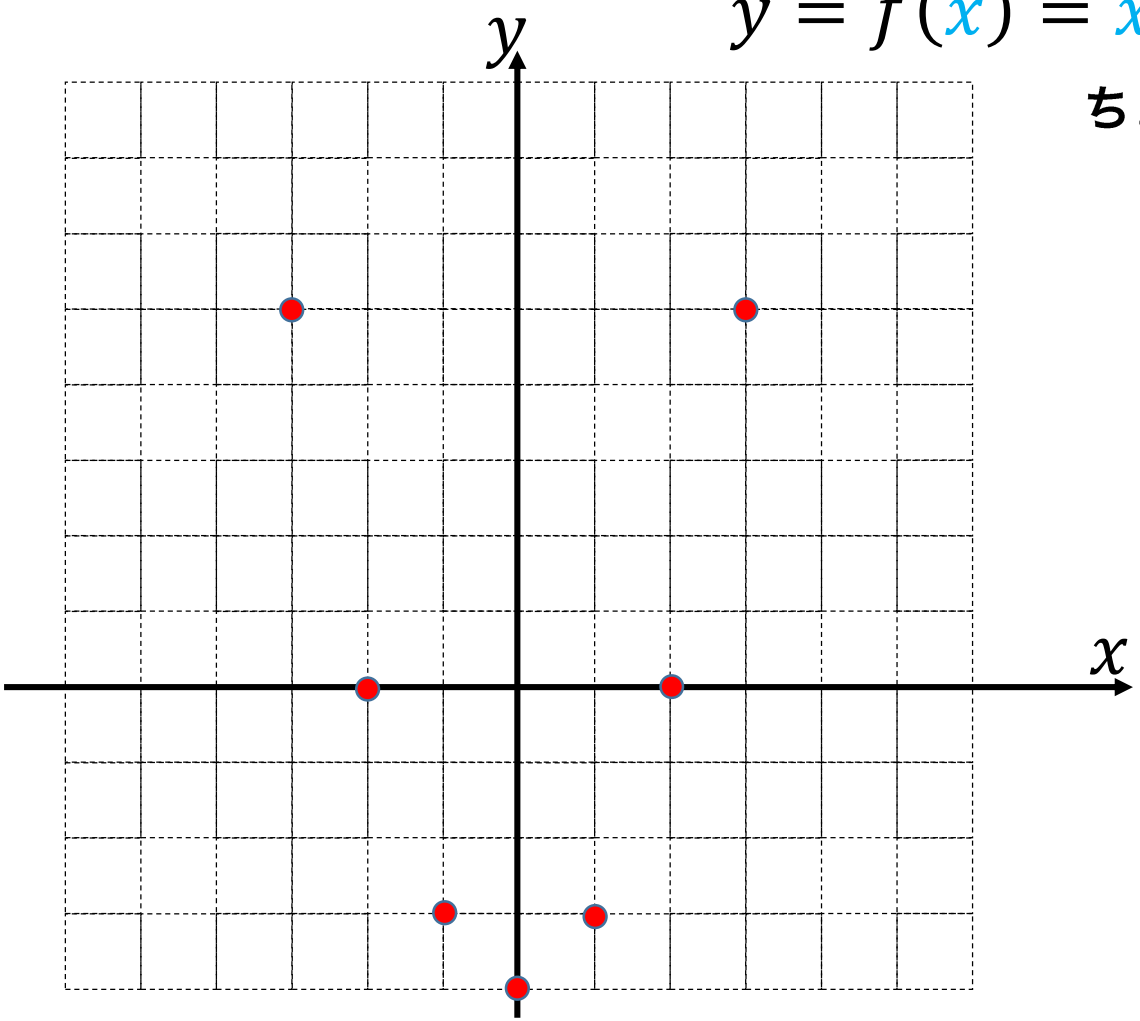
$f(0) =$
$f(1) =$
$f(2) =$
$f(3) =$
$f(4) =$
$f(5) =$
$f(-1) =$
$f(-2) =$
$f(-3) =$
$f(-4) =$

練習問題

「2次函数」を描いてみよう

次の2次函数を描いてみよう

$$y = f(x) = x^2 - 4$$



ちょっと大変ですが、もう少し計算しよう

$f(0.5) = 0.5^2 - 4 =$

$f(1.5) = 1.5^2 - 4 =$

$f(2.5) = 2.5^2 - 4 =$

$f(3.5) = 3.5^2 - 4 =$

$f(-0.5) = (-0.5)^2 - 4 =$

$f(-1.5) = (-1.5)^2 - 4 =$

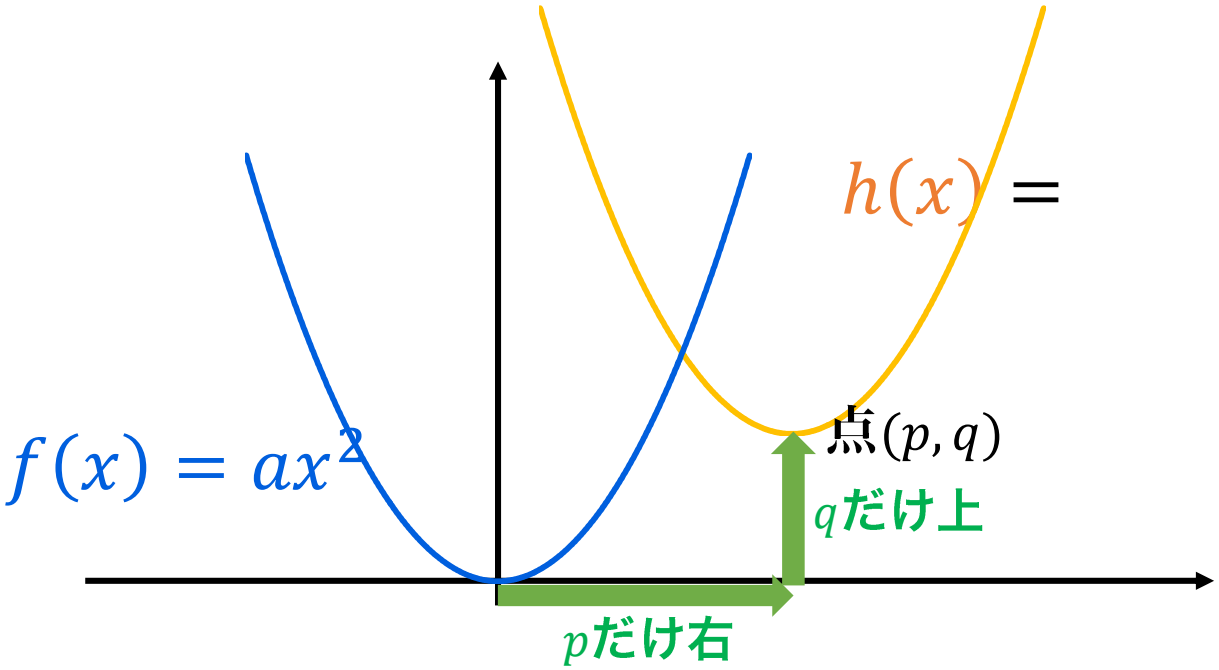
$f(-2.5) = (-2.5)^2 - 4 =$

$f(-3.5) = (-3.5)^2 - 4 =$

発展問題

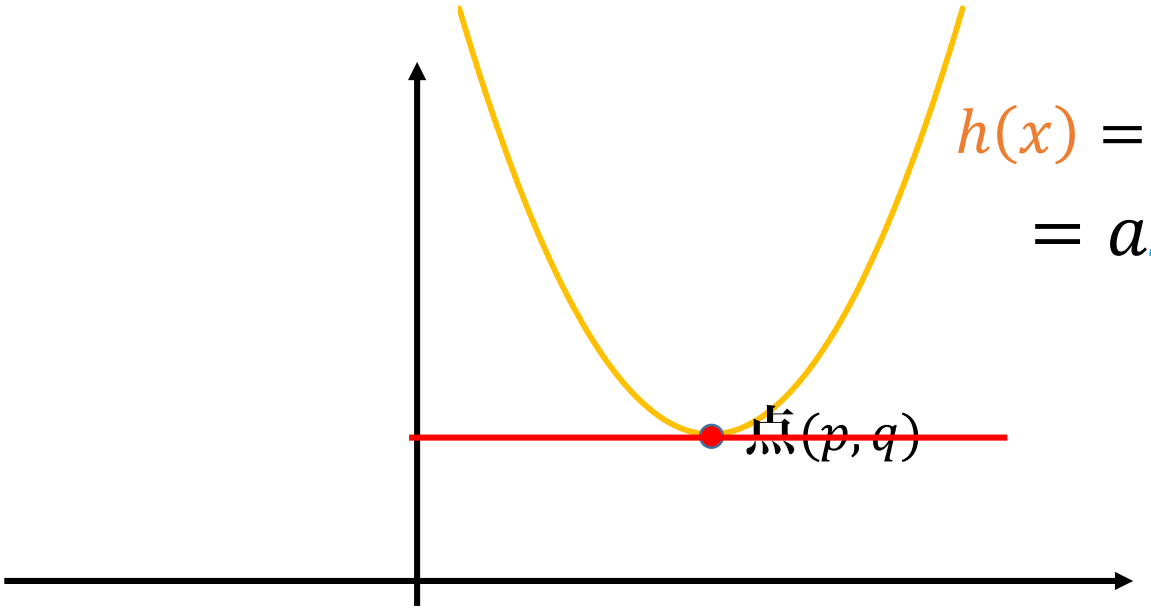
次のような二次函数の式を求めてみてください。

従って、$f(x) = ax^2$のグラフを右にp、上にq動かした、点(p, q)を頂点とする二次函数の式



二次函数の一般式と標準式

せっかくなので、微分も使ってみましょう。



$$h(x) = a(x - p)^2 + q$$
$$= ax^2 - 2apx + ap^2 + q$$

$$h'(x) = \frac{dh(x)}{dx} =$$

「二次」方程式を機械的に解くには？ その②：「解の公式」

ところで(xを含まない数や数式)をCと置くと次のように書けます。

二次方程式の目標：
- $(Ax+B)^2 = C$を目指す。
- この目指す姿(左辺)を展開すると

$$A^2x^2 + 2ABx + B^2 = C$$

このxを展開すると、

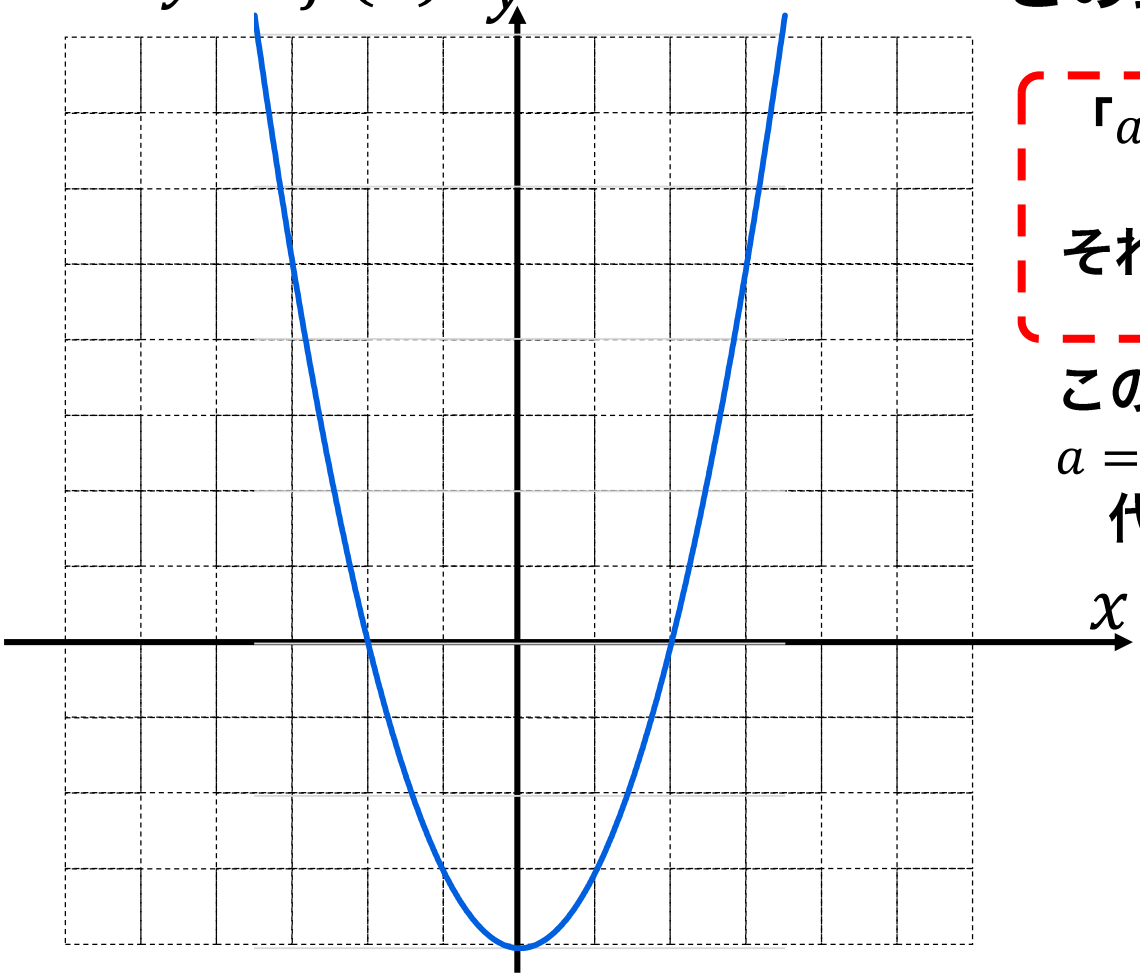
$$\leftrightarrow \quad x = \frac{-B \pm \sqrt{C}}{A}$$

になることを先ほど確認しました。
もし、$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$
という一般式を、この形にしてしまえば、どうなるでしょう？
質問を言い換えるなら、「A, B, Cという記号を利用せず」
「すべてa, b, c, xのみの式にする」とどうなるか？です。

練習問題

ほんとにそうか？知ってるグラフで検算しよう

$y = f(x) = x^2 - 4$



この式は、 $x = 2, x = -2$の時が解

「$ax^2 + bx + c = 0$の式があったとき、

それを満たすxの値が $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

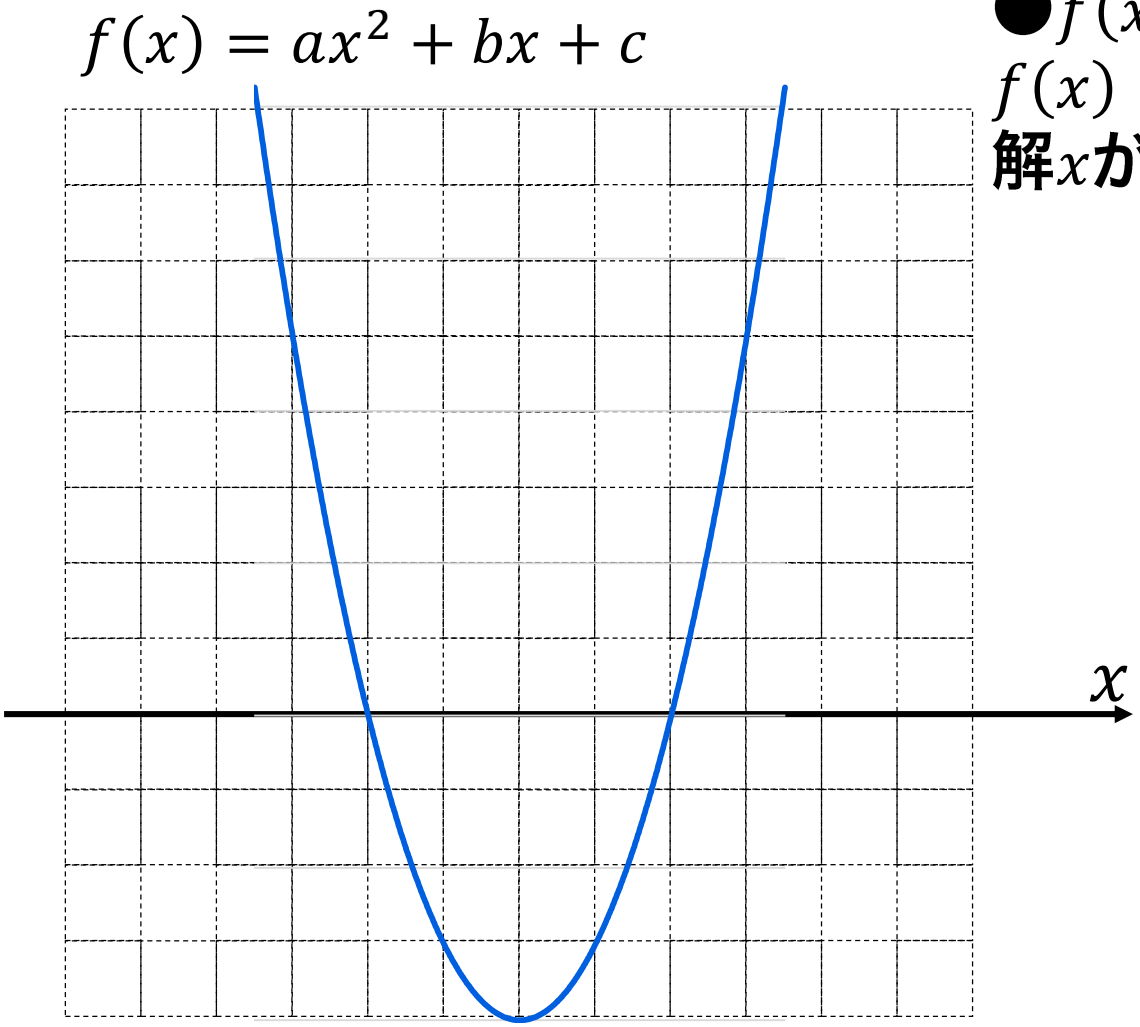
このグラフの式$x^2 - 4$は、

$a = 1, b = 0, c = -4$の式である。

代入するとどうなるでしょう？

練習問題

式の意味は、図にするとどういう意味でしょう



●$f(x) = ax^2 + bx + c$のグラフ、$f(x) = 0$となるような方程式の解xが

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる時、
グラフをヒントにすると、
式とグラフの対応は
どのように
考えられるでしょうか。

式の意味を確かめよう！

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

●もし、$b = 0$だったら、どんなグラフになりそうでしょうか。

●もし、$\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$だったら、どんなグラフでしょうか。

●もし、$\sqrt{b^2 - 4ac}$の中身が、負だったら、どんなグラフでしょうか。

練習問題

次の２次方程式を解きましょう

● $x^2 - 9 = 0$

●$2x^2 + 2x = -x + 9$

練習問題

次の２次方程式を解きましょう

- $2x^2 - 20x + 50 = 0$

- $6x^2 - 21x + 15 = 0$

実は「解を持つ」2次方程式には、楽ちんな解き方がある！

同じように

$$A(x+B)(x+C)=0$$

となるような時について、考えてみましょう。
ただし、$A=0$だと、xの値に関わらず、常に0となるため
そもそも2次方程式と言えないので、$A\neq 0$とします。

すると、

$$A\underbrace{(x+B)}_{\cdots\cdots}\underbrace{(x+C)}_{\cdots\cdots}=0$$

このとき、$(x+B)=0$, または $(x+C)=0$でなければ、
この式は絶対に$=0$にならないことを、確認してください。

練習問題

実は「解を持つ」2次方程式には、楽ちんな解き方がある！

次の式を展開してみましょう

$$(ax-b)(cx-d)=0$$

練習問題

次の２次方程式を$(ax-b)(cx-d)$の形にしてみてください

- $x^2+2x-15=0$

練習問題

次の２次方程式を$(ax-b)(cx-d)$の形にしてみてください

- $6x^2-21x+15=0$