Topgun$_{\mathbf{x}}$ Physics

#1 Classical Mechanics Mastery

「力学」マスター
第２章 ～微積分学と二次函数～

Ryosuke ISHII

瞬間速度

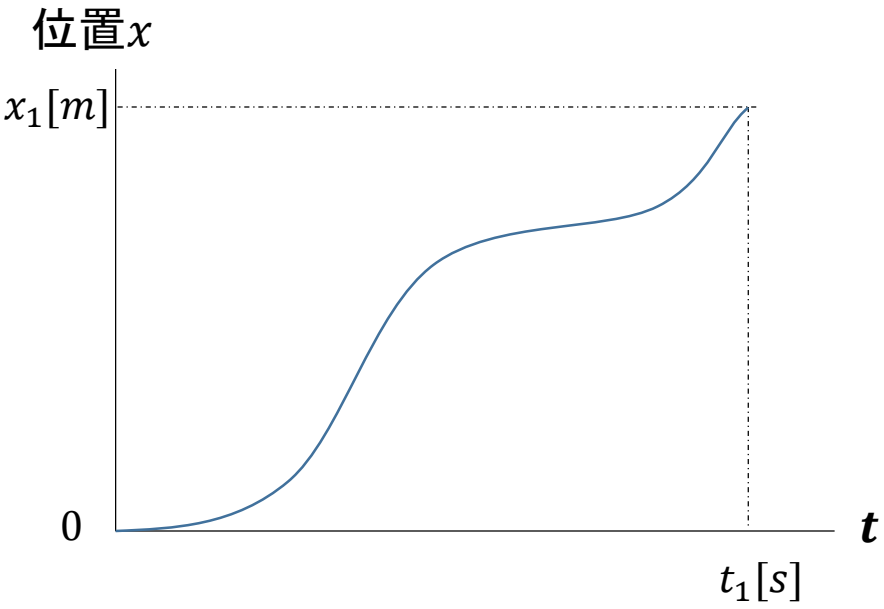
たとえば、ドライブする時
時速60kmで走ろう！と思っていても
実際には正確に時速60kmで
走り続けるのは難しいことです。

アクセルを踏んだり、離したりして、
速度が時々刻々、変わりゆくことが多いはずです。

つまり、等速度直線運動でない状況が
現実には多いということです。

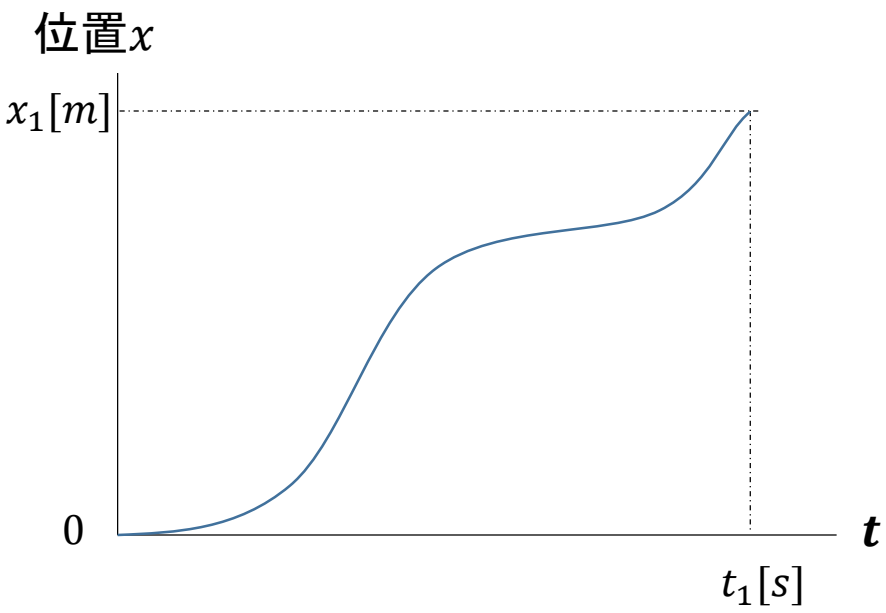
この$x-t$図の「意味」は、何でしょうか？

$x-t$図は「自然を上手に記録する」するためにある。
ということを、私達は既に学びました。
この記録は何を意味するのでしょうか？日本語で「意味」を記述してみましょう。



この$x-t$図の「意味」は、何でしょうか？

$x-t$図は「自然を上手に記録する」するためにある。
ということを、私達は既に学びました。
この記録は何を意味するのでしょうか？日本語で「意味」を記述してみましょう。



一番大事なことは

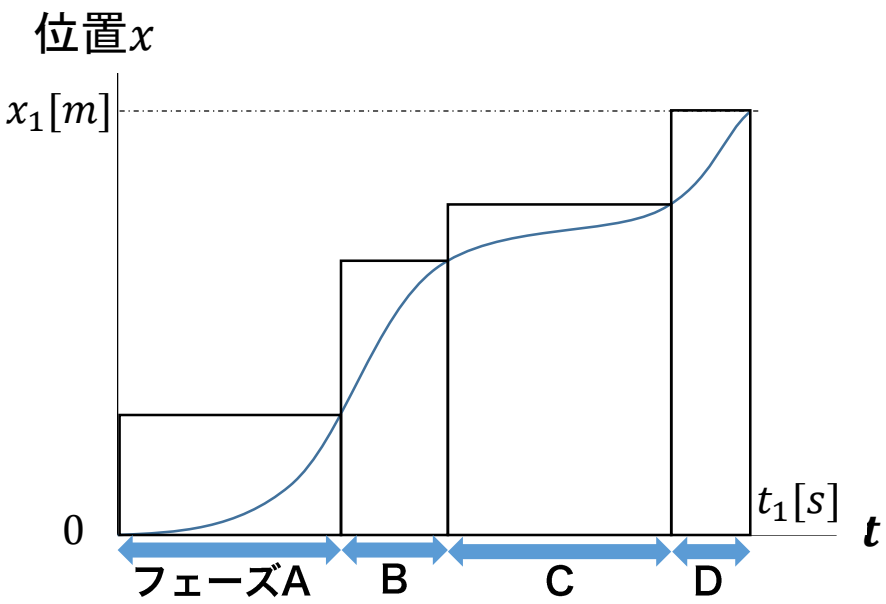
- **時刻$0[s]$に位置$0[m]$から出発し、時刻$t_1[s]$に位置$x_1[m]$に到着したグラフ。**

- **その間の行程「いつどこに居たか」を記録したグラフです。**

より詳細に、グラフの特徴を記載すると、どういった特徴があるでしょうか？

この$x-t$図の「意味」は、何でしょうか？

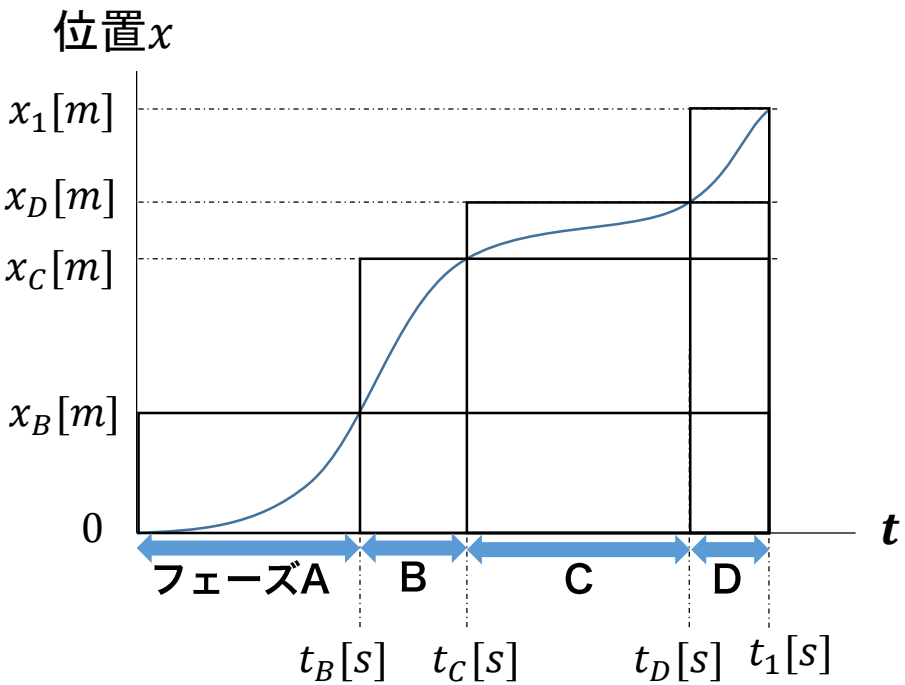
この図の意味を、グラフの特徴から考える。



例えばですが、フェーズを４つに区切って左のように考えると、どんなことに気づくことができそうでしょうか？

この$x-t$図の「意味」は、何でしょうか？

この図の意味を、グラフの特徴から考えるため
とりあえず、位置と時間を「勝手に」振ってみましょう。



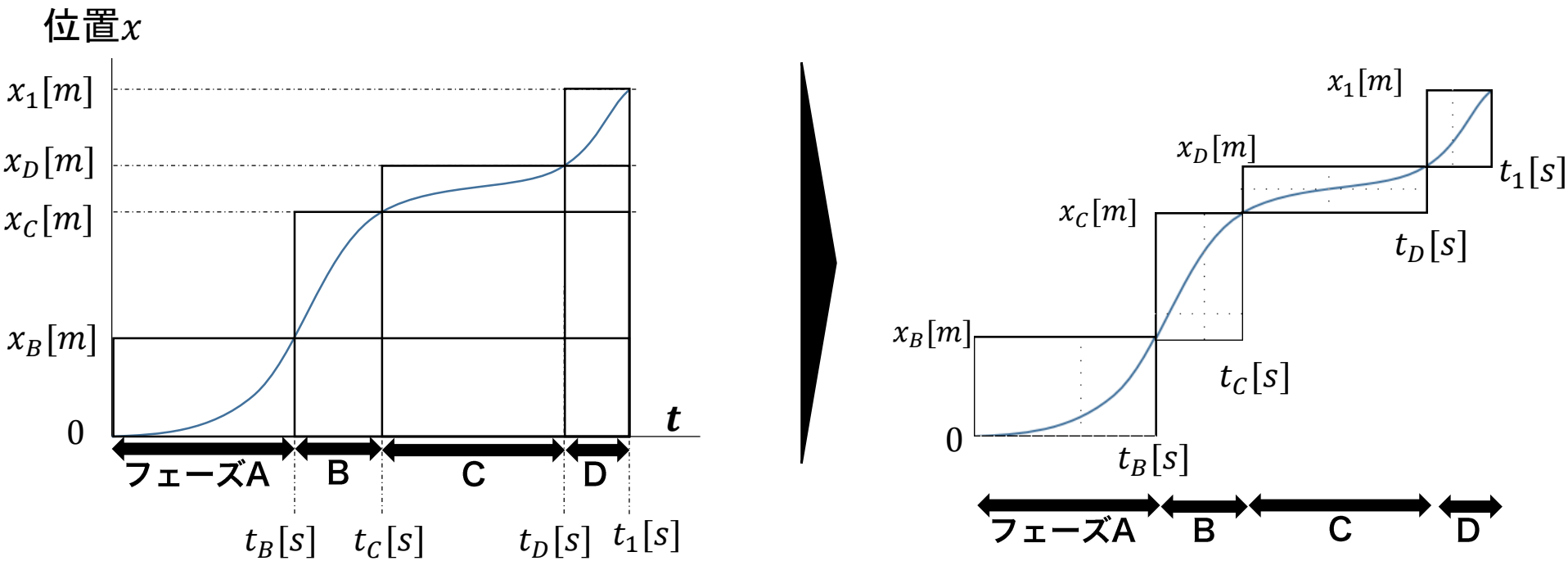
わかりやすいように、
各フェーズの開始時の時間と位置を、
それぞれt, xの右下の添字にしました。

例えば、フェーズBの開始時の
**　時刻を$t_B[s]$**
**　位置を$x_B[m]$**
と(勝手に)置きました。
名前をつけただけです。

ただし、フェーズAの開始時は、
位置も時間も0なので、そのままにしました。

この$x-t$図の「意味」は、何でしょうか？

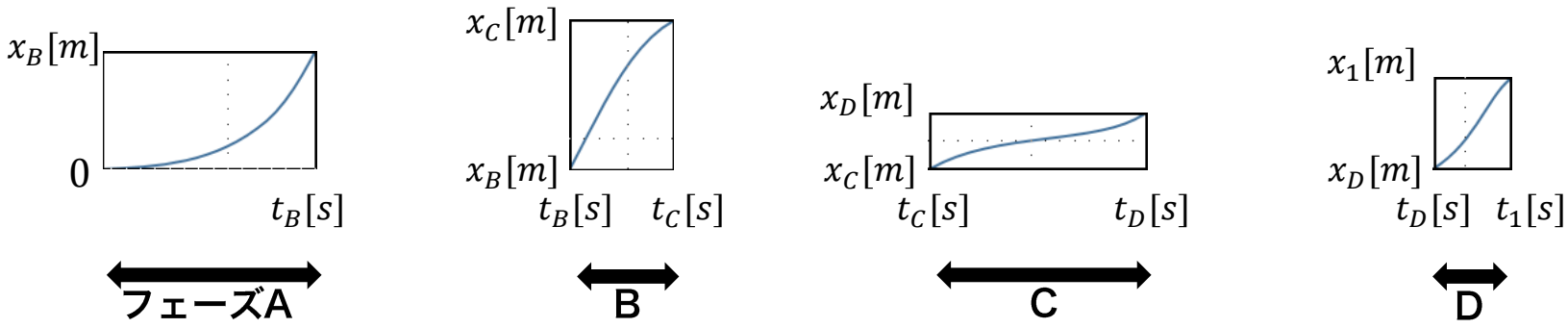
ちょっと分解してみましょう。



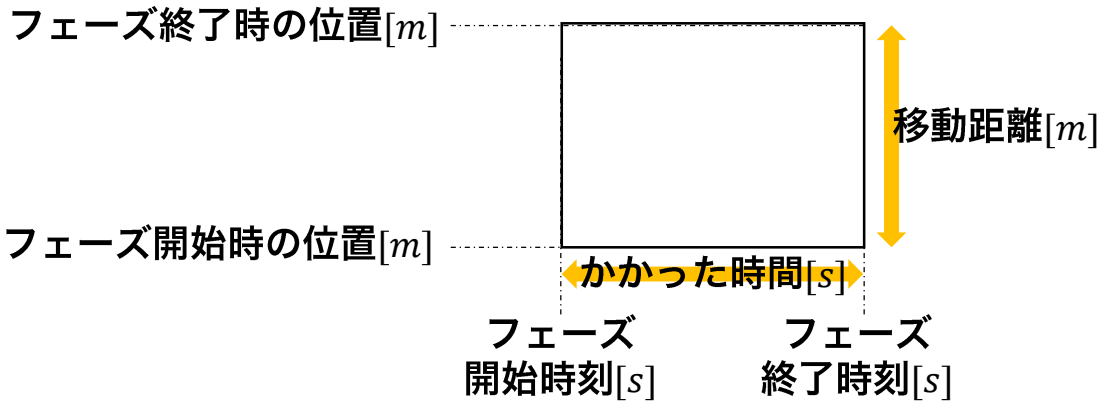
ここまでは、あんまりアタマを使わずに、
場所と時刻の名付けをして、グラフを切り刻んだだけです。

各フェーズの区切った長方形の意味を考えよう。

いま、各フェーズについて、次の図ができました。
ざっくり言って、縦長の図と横長の図がありますね。

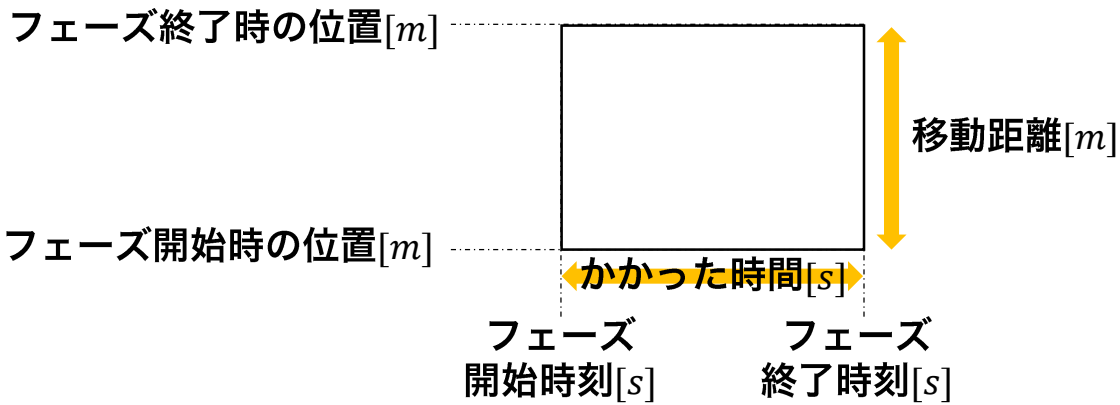


記号が色々振られていて、慣れるまでは戸惑うかもしれませんが、
上記の4つの図の「物理的な意味」を日本語で書くと、下のようになります。

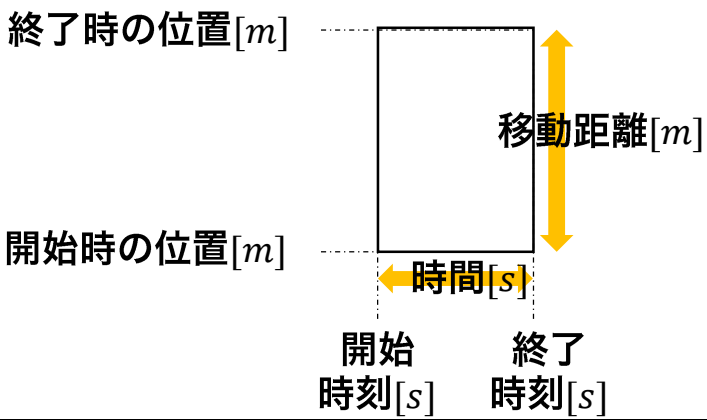


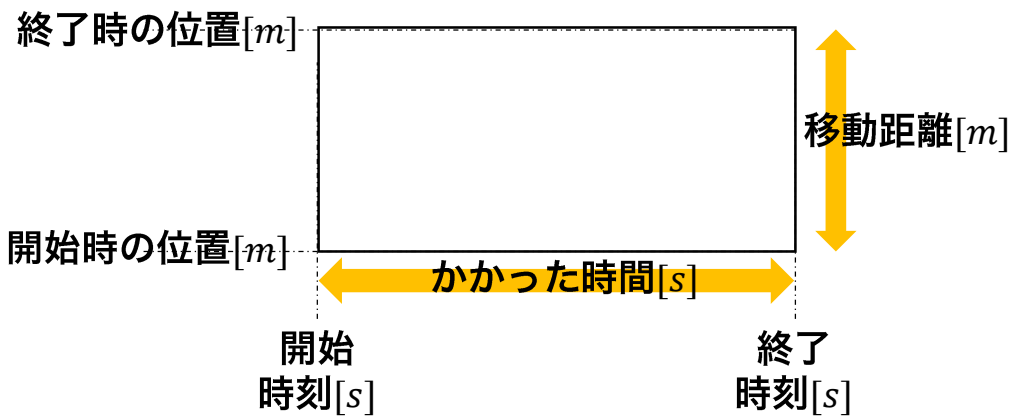
長方形の「意味」は、何でしょうか？

この四角の意味について、考えてみましょう。

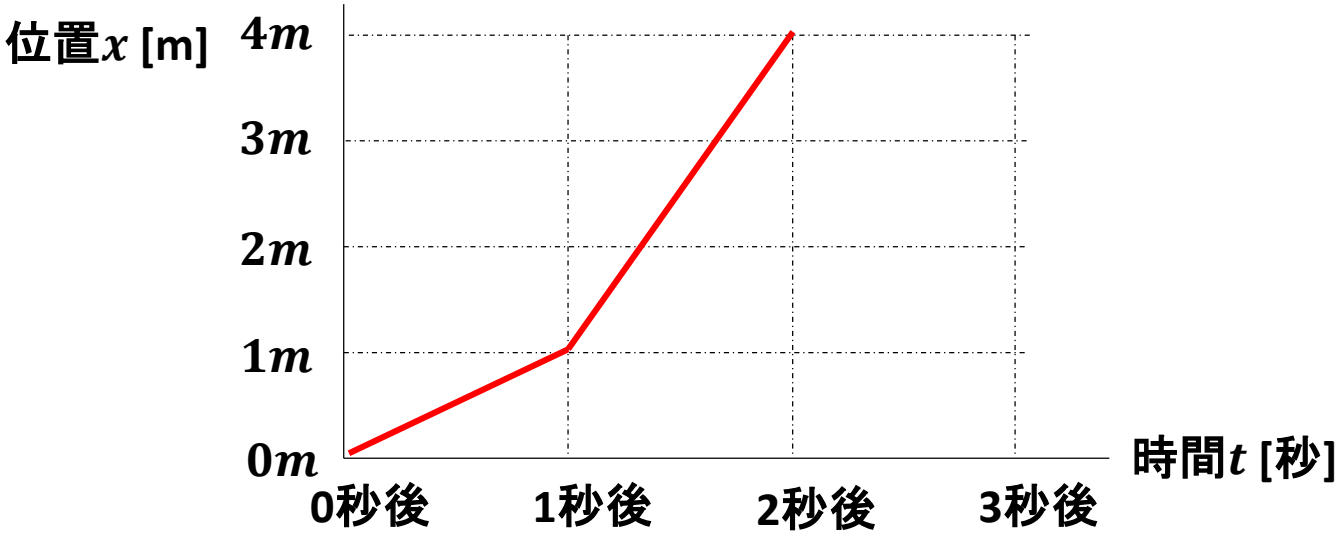


この四角が「縦長になる」または「横長になる」ことは、何を意味するでしょう





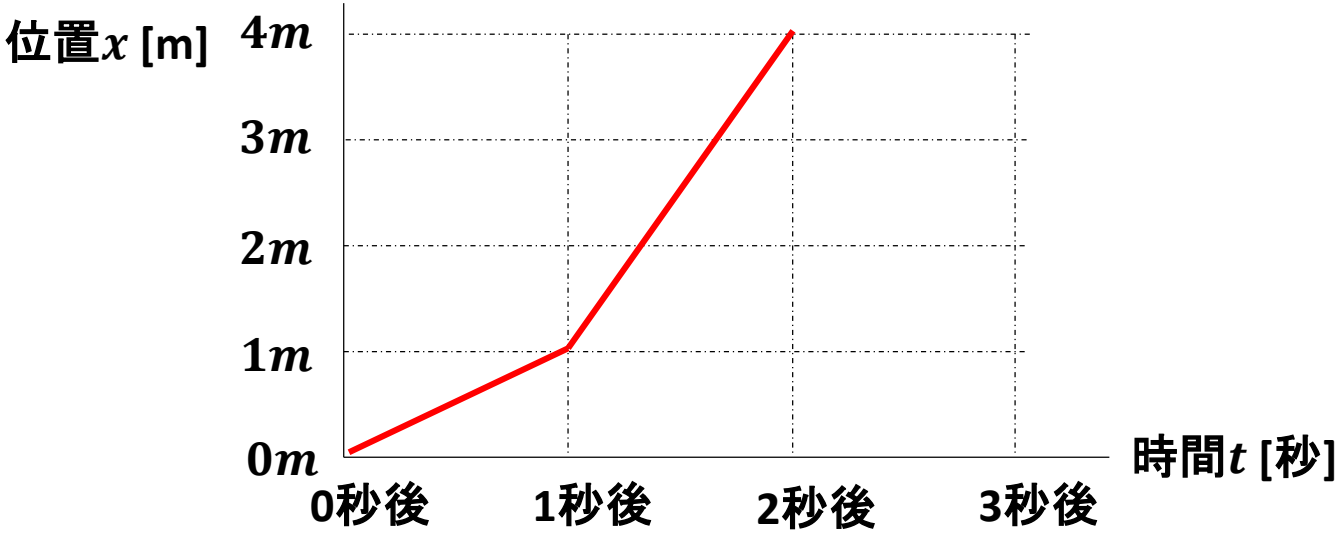
迷った時は、単純な具体例で考えてみましょう！

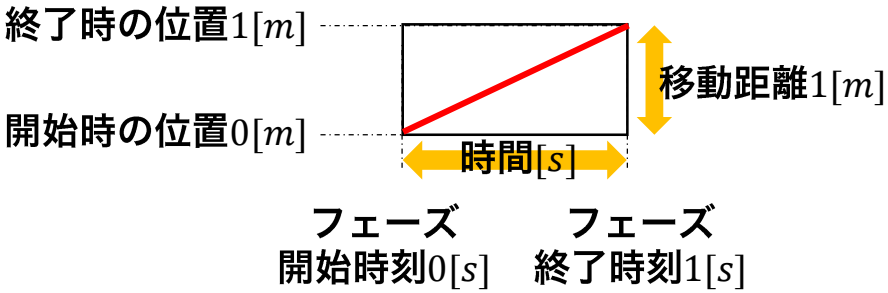


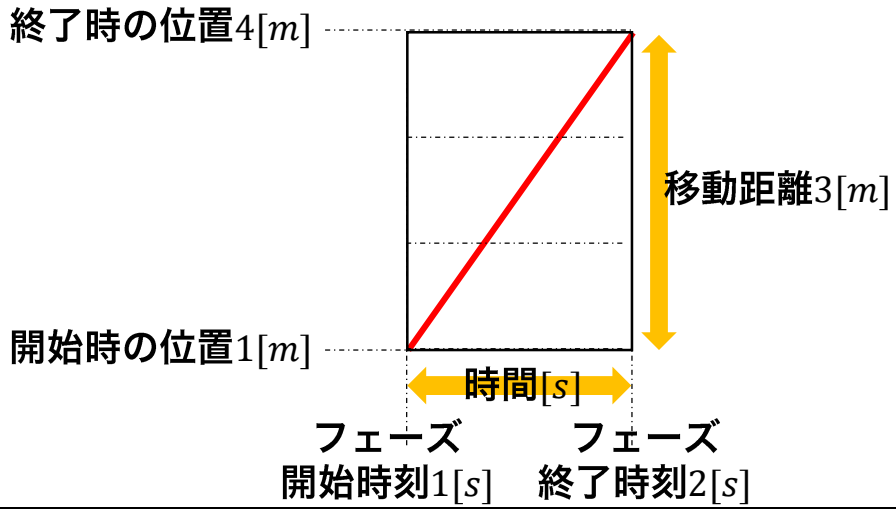
この$x-t$図は、これまで何度か扱った、
等速度直線運動のグラフで、

それぞれのフェーズの**傾きが速度**でした。

上下の図は、<u>切り出しただけで同じ図だ</u>とわかりますか？



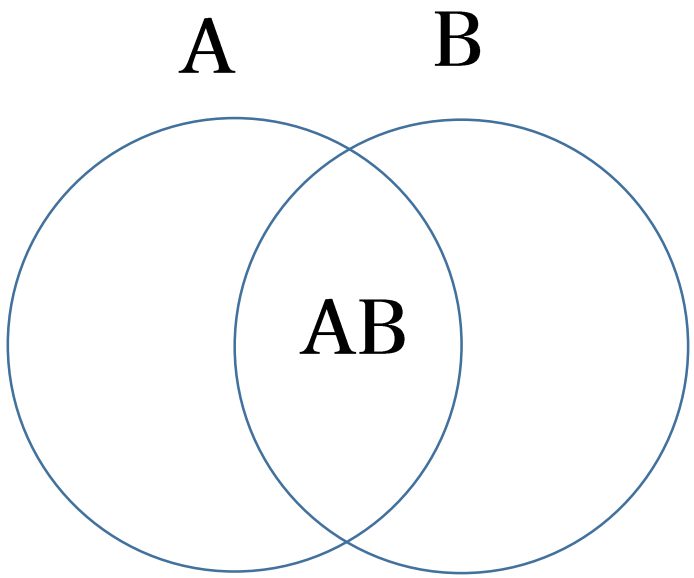




コラム：なぜ眼は二つあるのか？

両目で見たとき、
同じものを見ても、
片目で見るより
深い情報が得られる。

視差から、
世界が立体的に立ち現れる。

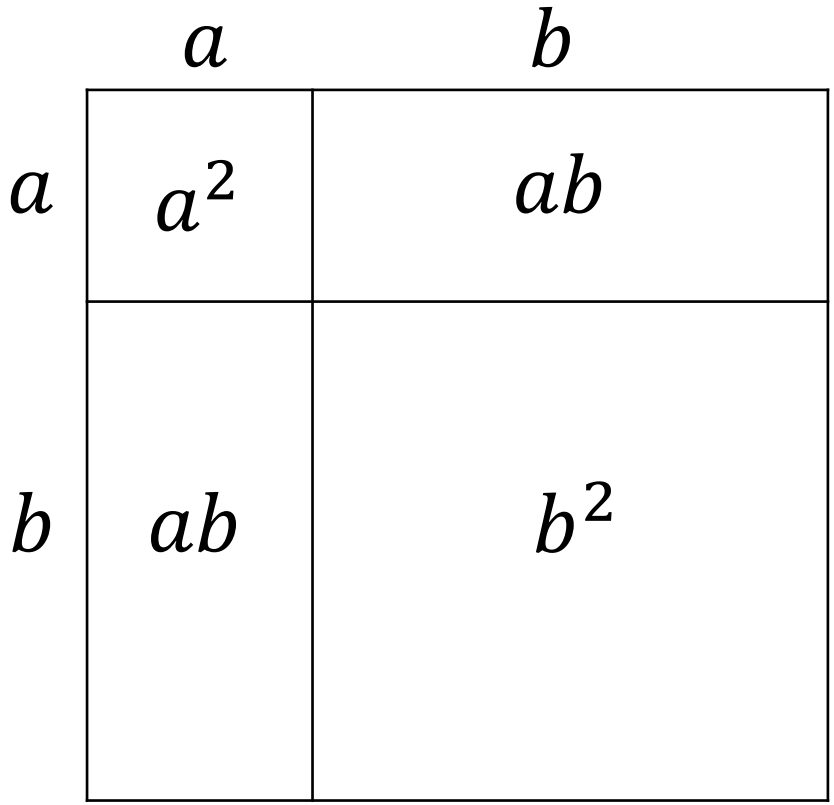


つまり「ひとつの情報より、ふたつ以上のほうがよい」のです。

Gregory Bateson; Steps to an Ecology of Mind, (Ballantine Book, 1972).
Mind and Nature: A Necessary Unity, (Wildwood House, 1979).

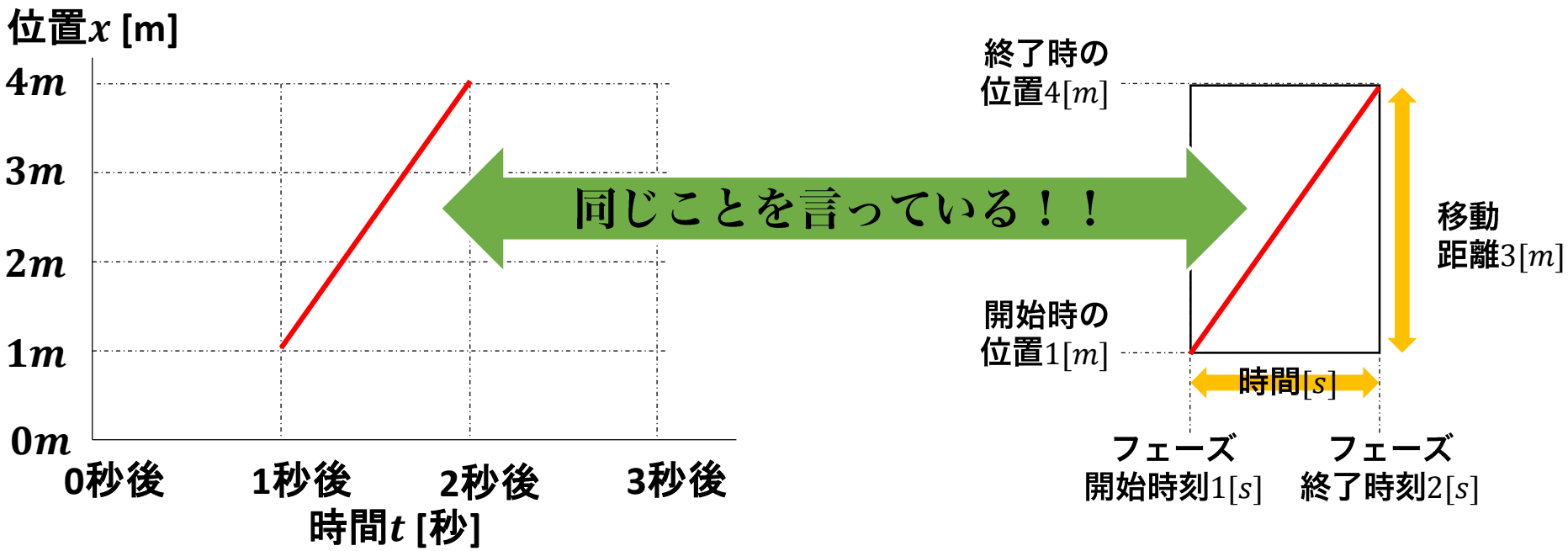
コラム：ひとつの情報より、ふたつ以上のほうがよい」

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の「説明」
分配法則で説明ができるが、幾何学的にもできる。



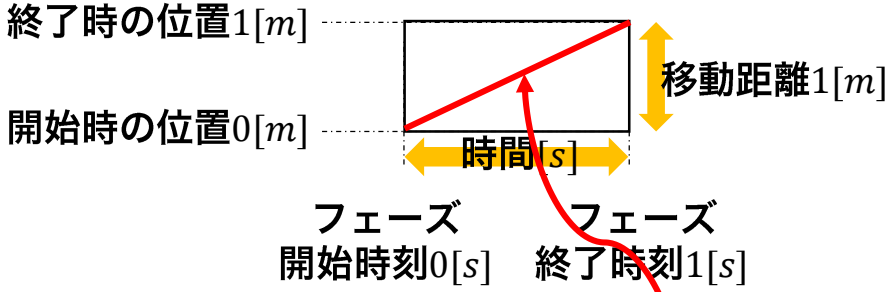
コラム：ひとつの情報より、ふたつ以上のほうがよい」

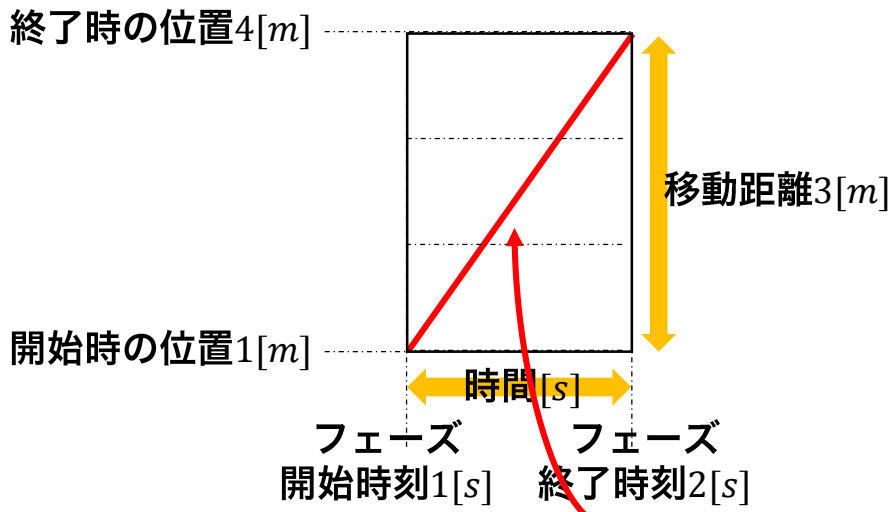
同じように、「同じ意味のこと」を複数の切り口で学ぶこと、
具体化したり抽象化して学ぶことが、理解を深めることがあります。



「分かった気にならず深める」ことが、ゲシュタルトを創ります。

この具体例からわかること



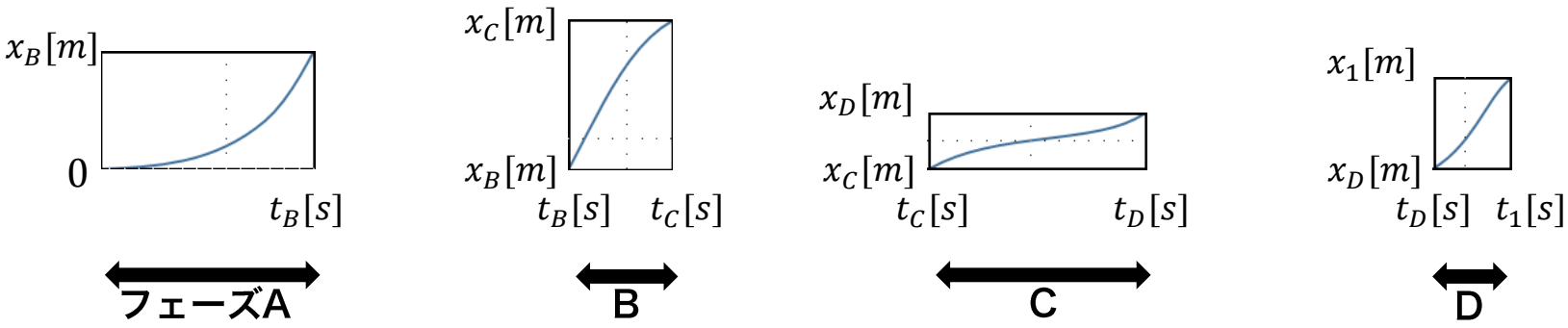


$$\text{速度} = x - t\text{図の傾き} = \frac{\text{移動距離}_{1[m]}}{\text{時間}_{1[s]}} = 1[m/s]$$

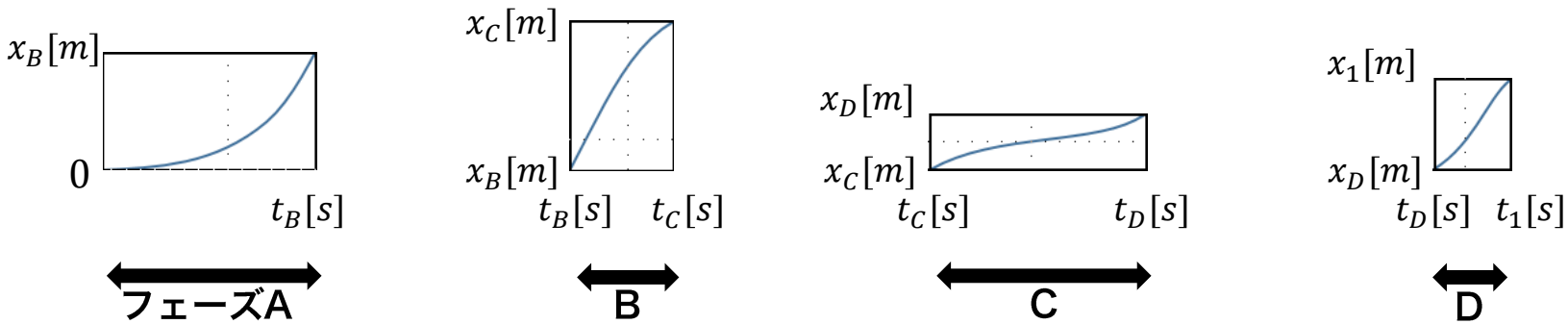
$$\text{速度} = x - t\text{図の傾き} = \frac{\text{移動距離}_{3[m]}}{\text{時間}_{1[s]}} = 3[m/s]$$

フェーズごとの速度が速いと、縦長になる。

各フェーズに区切った長方形の「フェーズごとの速度」を求めてみましょう。



各フェーズに区切った長方形の「フェーズごとの速度」を求めてみましょう。

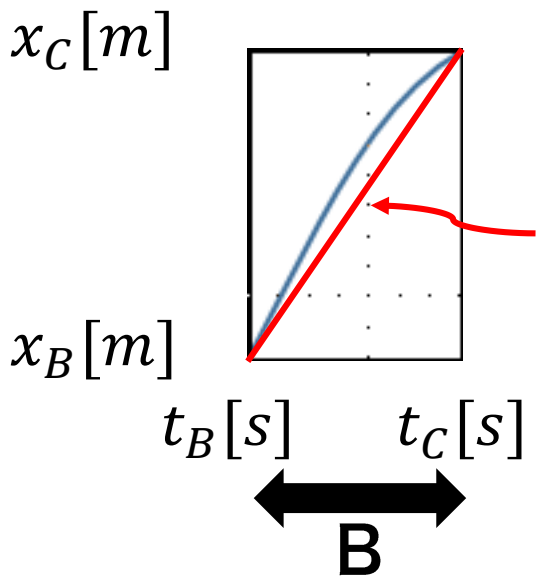


フェーズBの速度$= x - t$**図の傾き**$=$ $\boxed{\dfrac{x_C - x_B}{t_C - t_B}\ [m/s]}$

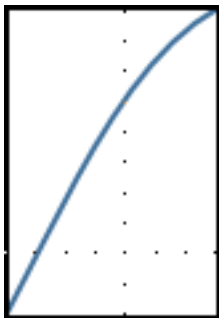
※CとBの順序はこの順番

では「フェーズBの速度」とは何でしょう？

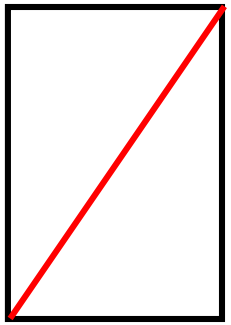
「フェーズBの速度」とは何でしょう？



この赤線がフェーズBの速度$= \dfrac{x_C - x_B}{t_C - t_B}\ [m/s]$

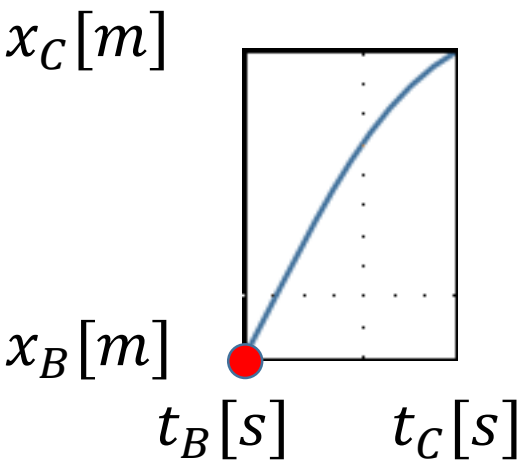


ではなく、



を求めた。
これを、フェーズBの「平均速度」という。

いま、この瞬間の速度は？？

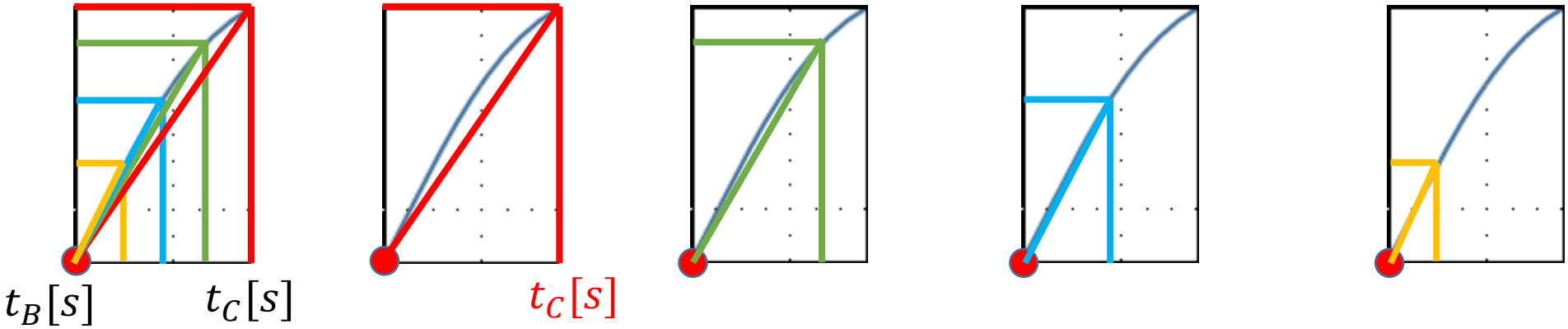


フェーズの平均速度ではなく、
時刻$t_B[s]$で、位置$x_B[m]$
に居る「瞬間の速度」を求めたい!!

(車に乗っていたら、
いま現在の時速が知りたいですよね)

どうしたら「いま、この瞬間」の速度が求められるでしょう？

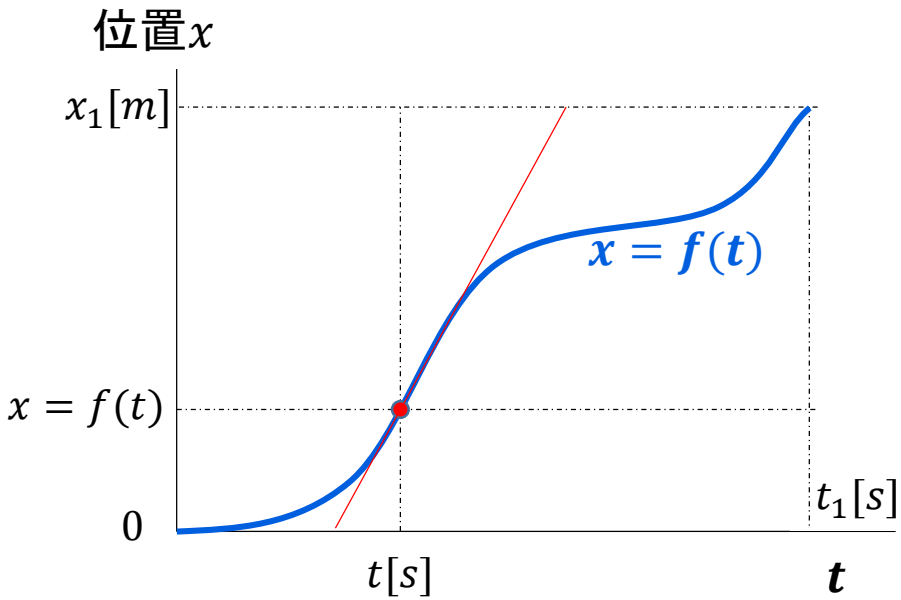
どんどんt_Bからの時間を短くとってみたらどうでしょう？



どんどん$t_B[s]$の「瞬間の傾き」＝「瞬間の速度」に近づけそうです。

瞬間の傾き＝瞬間速度を数学的に定義してみましょう。

まず、この曲線を、位置$x = f(t)$として、時間の函数として置きます。



すると、時刻$t[s]$の位置は$x[m] = f(t)$であり、左図の赤丸• の位置になります。

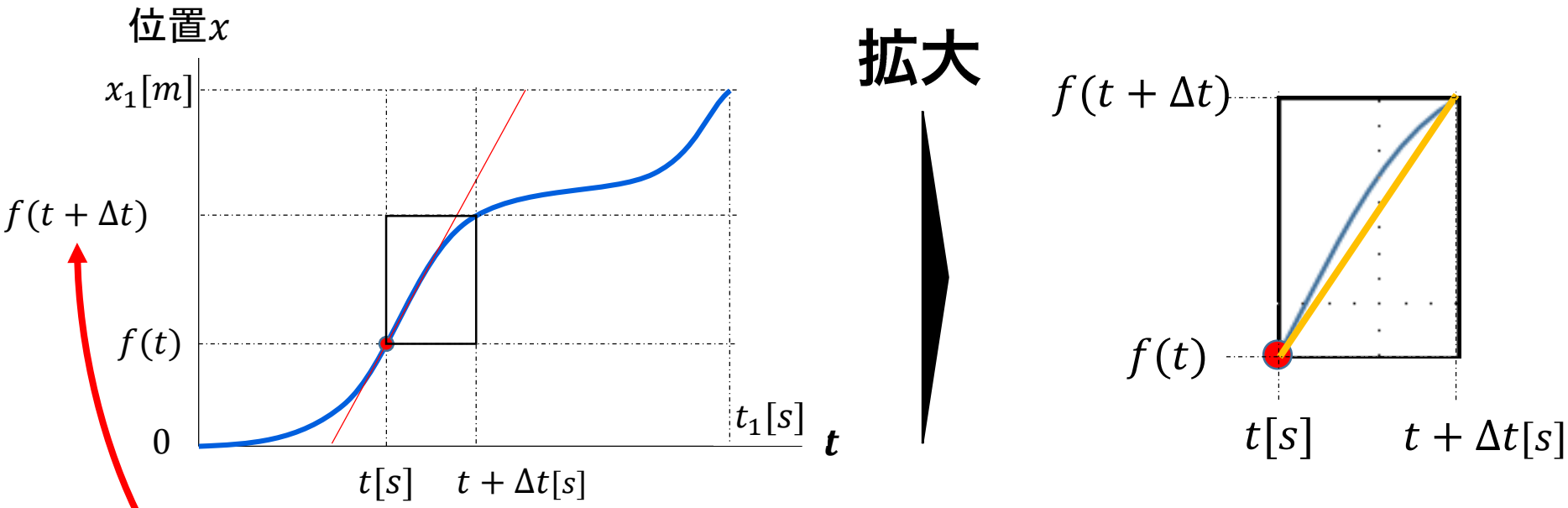
また、
その時の「瞬間の速さ」
つまり、瞬間の傾きは、

まだ求め方はわかりませんが、
赤線のようになるはずです。

この、ある点に於ける傾きを示す線を
「接線」と言います。

瞬間の傾き＝瞬間速度を数学的に定義してみましょう。

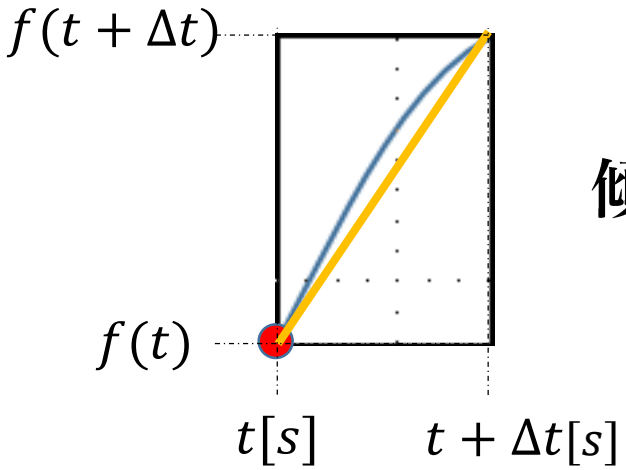
次に、時刻tからΔt秒経過した、
時刻$(t+\Delta t)$について考えてみましょう。



時刻$(t+\Delta t)$のxの値は、
単に$f(t)$に代入すると、
$f(t+\Delta t)$になるはずです。

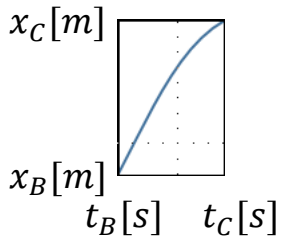
瞬間の傾き＝瞬間速度を数学的に定義してみましょう。

前と同じように、傾きを求めてみましょう。



傾きはどうなるでしょうか？

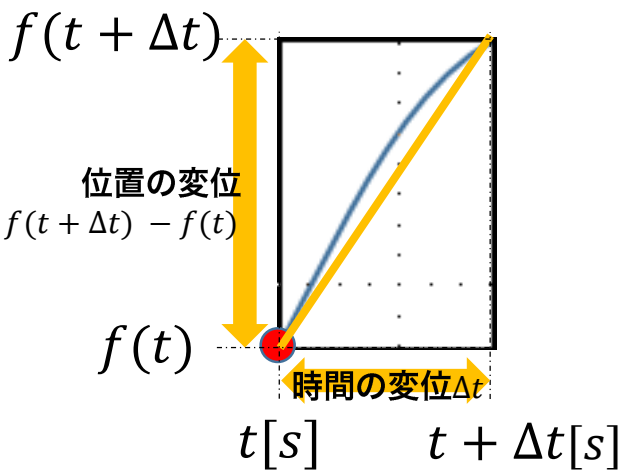
参考：前はこうやりました



フェーズBの速度$= \dfrac{x_C - x_B}{t_C - t_B}[m/s]$

瞬間の傾き＝瞬間速度を数学的に定義してみましょう。

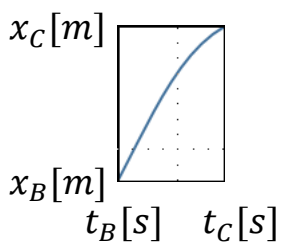
前と同じように、傾きを求めてみましょう。



傾き=速度は $\dfrac{f(t+\Delta t)\ -f(t)}{(t+\Delta t)-t}$

この時、 Δtをどんどん小さく、
限りなくゼロに近づけることで、
「瞬間の傾き」に、限りなく近づけます。

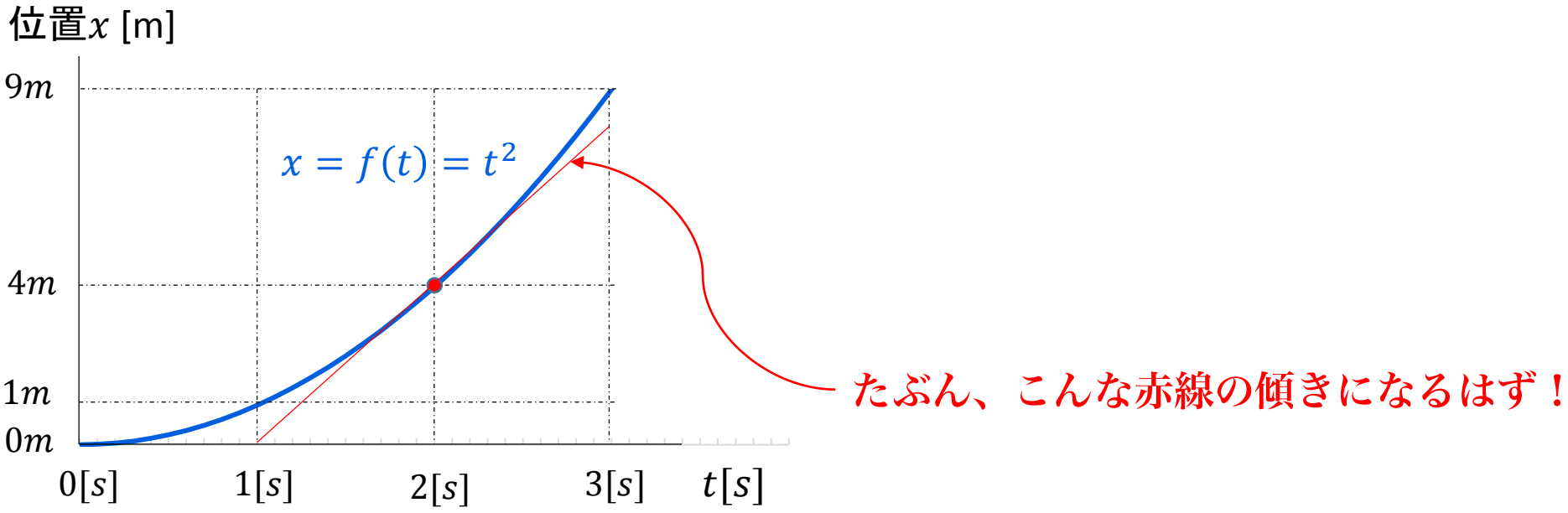
参考：前はこうやりました



フェーズBの速度$=\dfrac{x_C-x_B}{t_C-t_B}[m/s]$

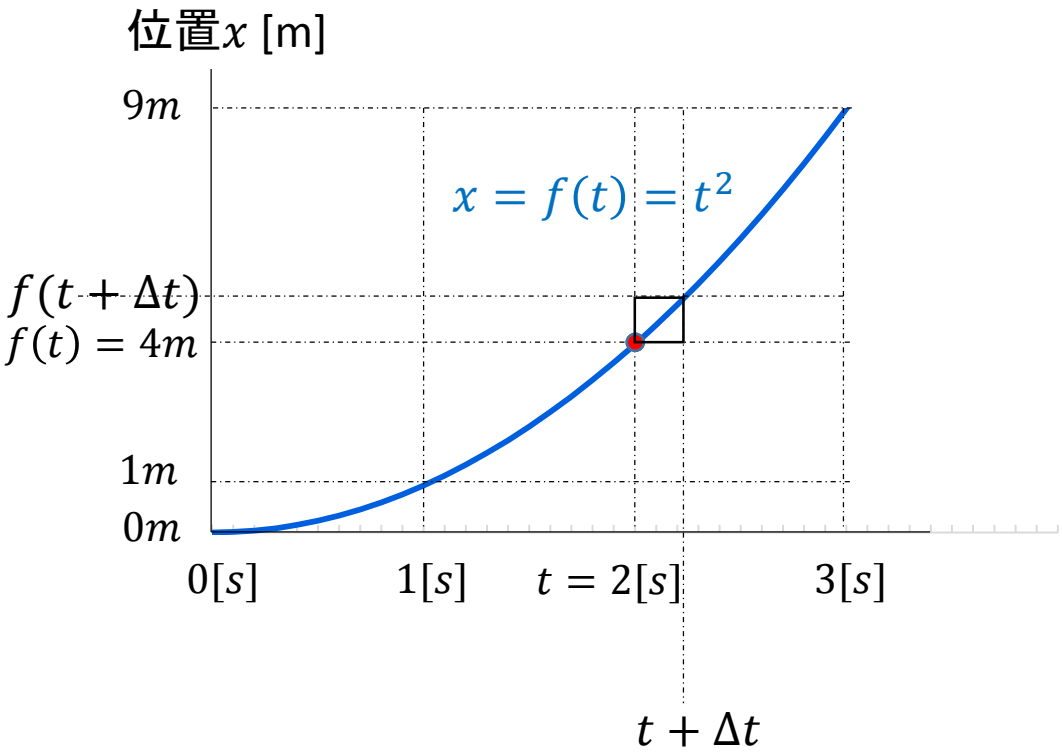
具体的な函数でやってみましょう。

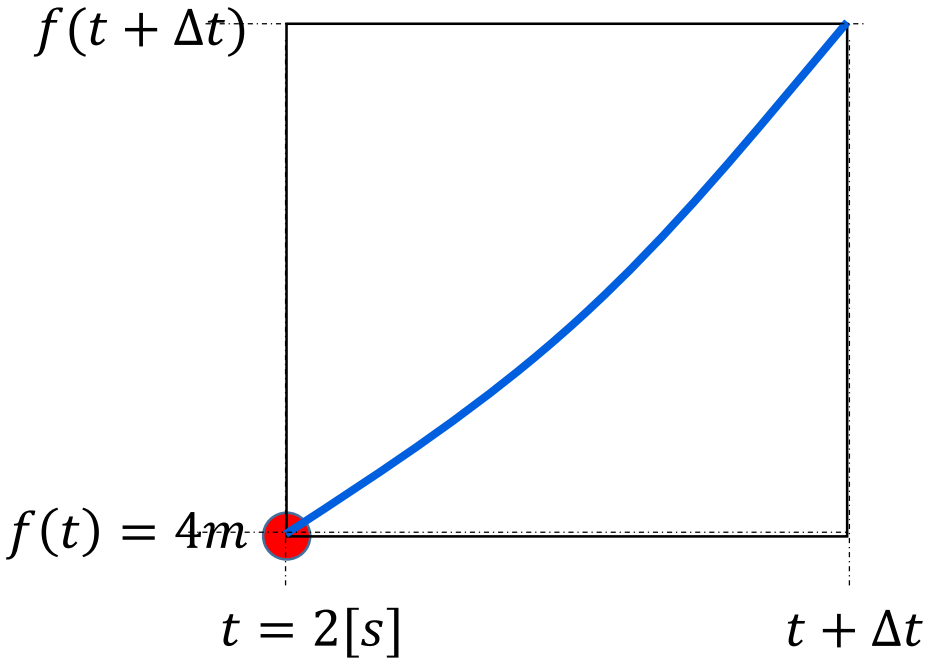
いま、位置$x = f(t) = t^2$の$x - t$図があります。
このとき、 $t = 2[s]$における、瞬間の速さを考えてみましょう。



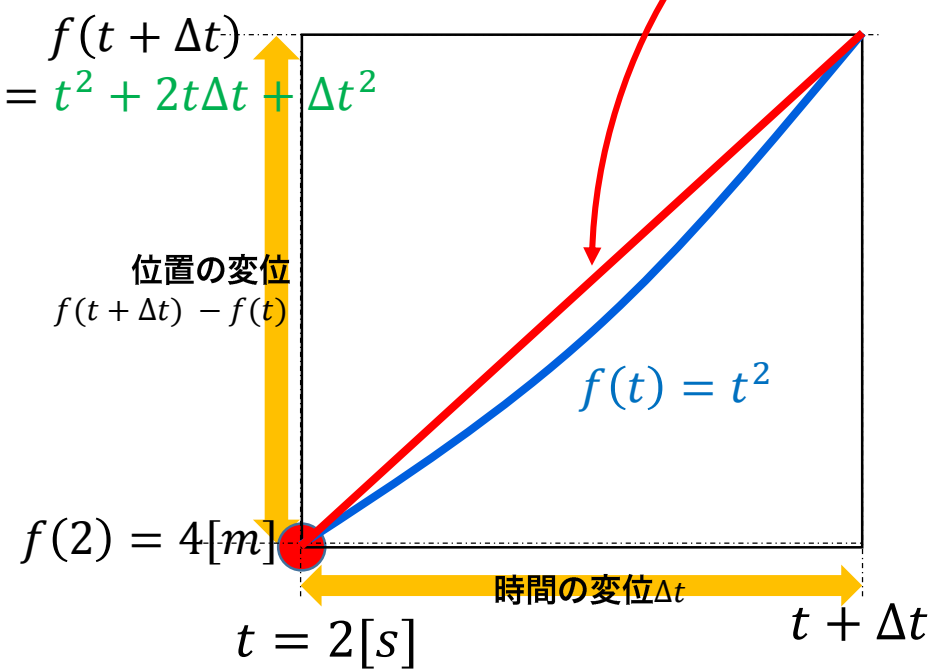
いま、位置$x = f(t) = t^2$の$x - t$図があります。
このとき、 $t = 2[s]$における、瞬間の速さを考えてみましょう。

早速、セオリー通り$t + \Delta t$について考えてみたいと思います





いま、位置$x = f(t) = t^2$の$x - t$図があります。
このとき、 $t = 2[s]$における、瞬間の速さを考えてみましょう。



この傾き=速度は$= \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{(t+\Delta t) - t}$

ここで、$f(t) = t^2$
また

$f(t) = t^2$ の式に、 tに$t + \Delta t$を代入して
$f(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$

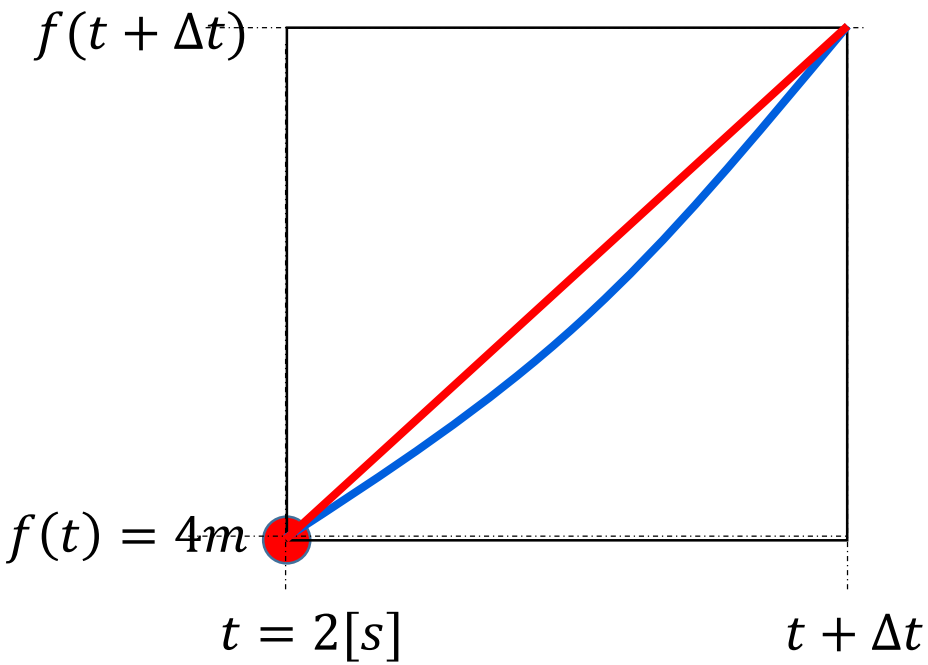
傾きの式にそれらの結果を戻すと

傾き=速度は$= \dfrac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t}$

$= \dfrac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}$

※一般にΔt^2は$(\Delta t)^2$、つまり変化量の自乗を意味し$\Delta(t^2)$つまり自乗の変化量を意味しない。

いま、位置$x = f(t) = t^2$の$x - t$図があります。
このとき、 $t = 2[s]$における、瞬間の速さを考えてみましょう。



いま、以下の式までわかった。

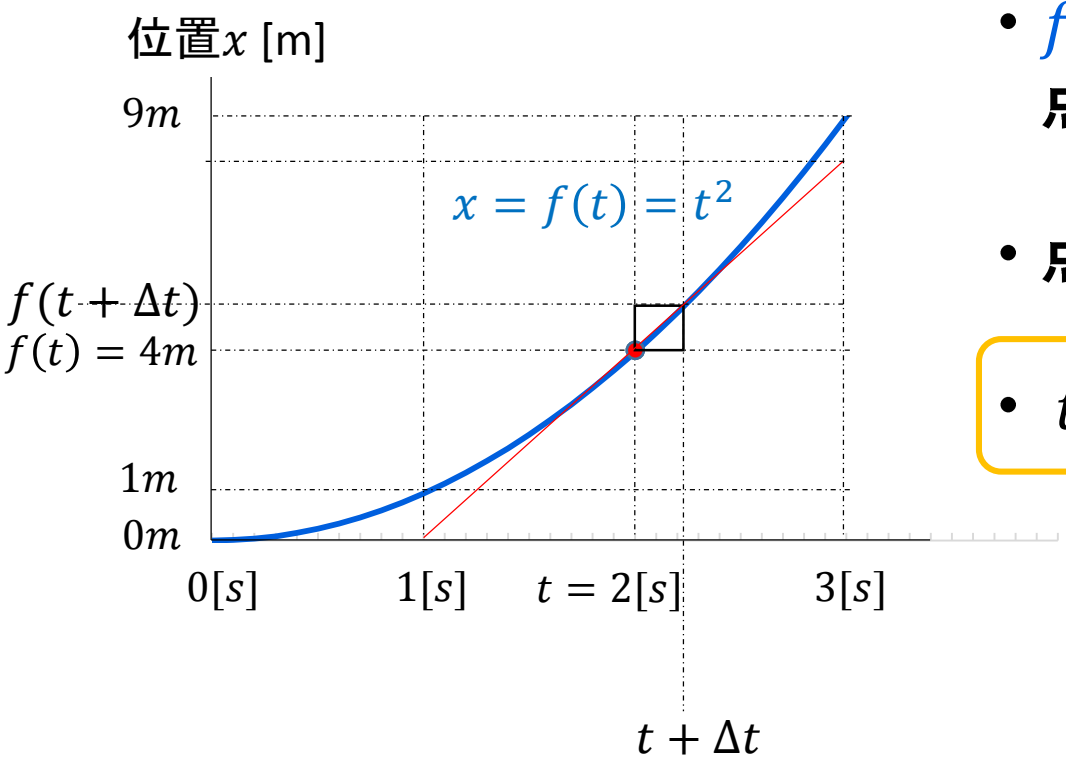
$$\text{傾き=速度は} = \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}$$

ここでΔtは「限りなく小さな値をとる」
ことを思い出すと、
Δt^2は、無視できるくらい小さい。
(例えば$\Delta t = 0.01$ の時　$\Delta t^2 = 0.0001$)
よって、Δt^2を無視すると

$$\boxed{\text{傾き=速度は} = \frac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2t[m/s]}$$

いま、$t = 2[s]$より、
$t = 2[s]$の瞬間の傾き=速度= $\mathbf{4[m/s]}$

いま計算したことの「意味」を考えてみましょう。

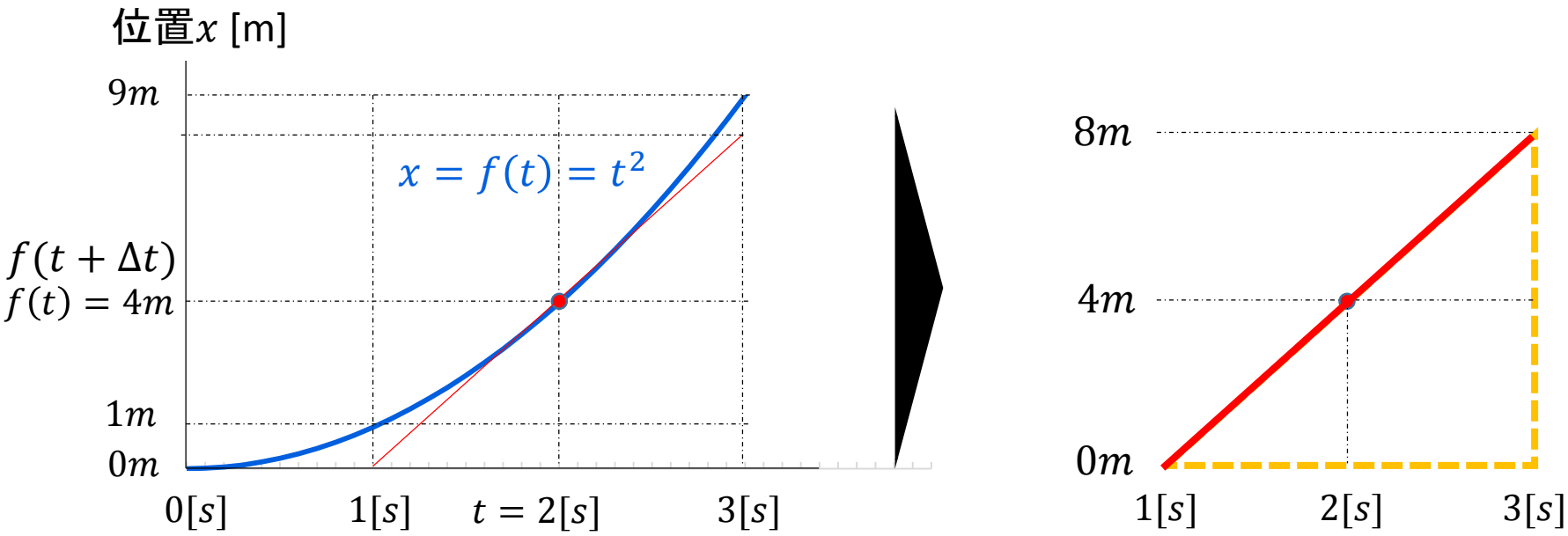


いま、以下のことを
私たちは導いてきました。

- $f(t) = t^2$ **という函数の、**
  点tに於ける傾きを求めた。
- **点tに於ける傾きは$2t$だった。**
- $t = 2[s]$**の時、傾きは**$4[m/s]$

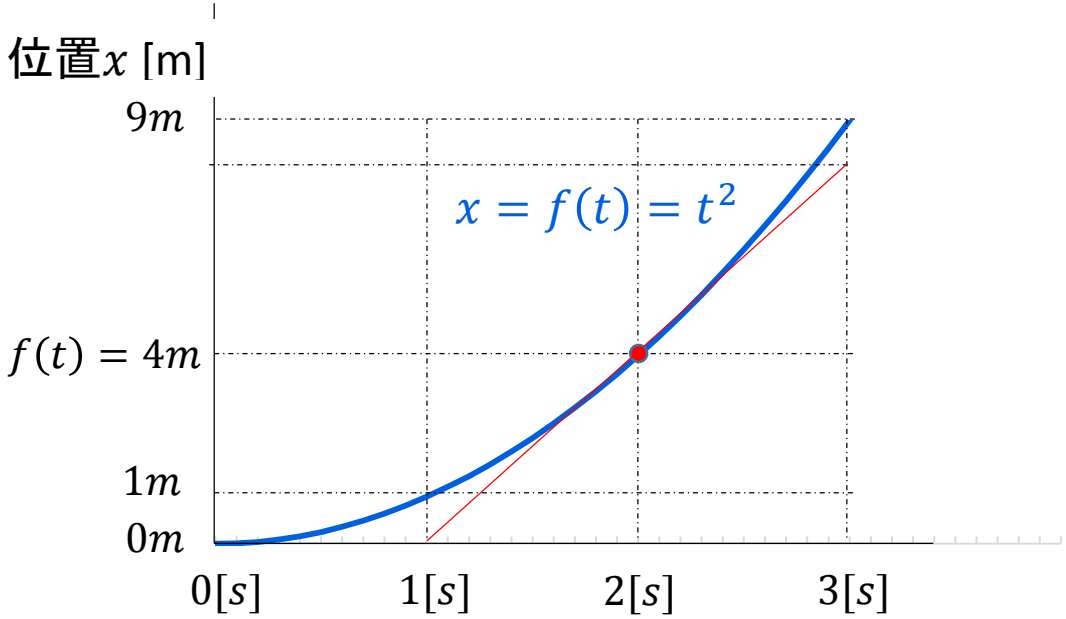
ホントに！？

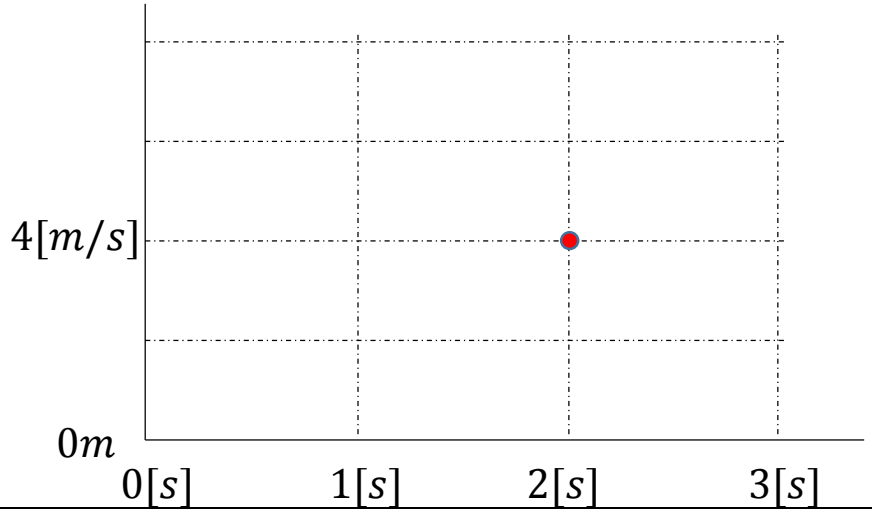
まず、$t = 2[s]$の時、傾きは$4[m/s]$ってホント？



$t = 2[s]$の時の傾きを図形的に見ると
傾きは確かに$4[m/s]$になっているように見える

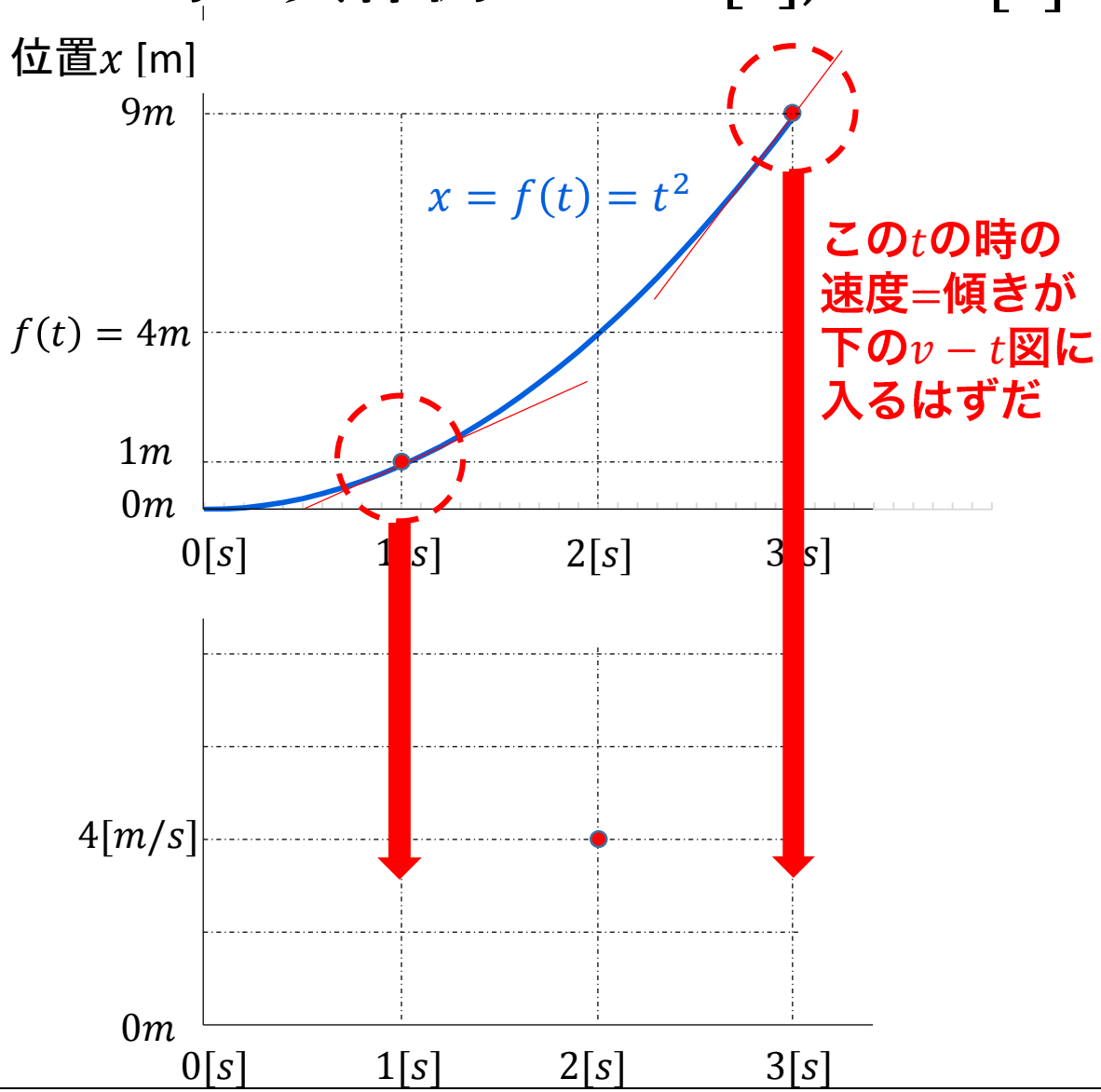
この$x-t$図に対応する$v-t$図を描けますか？



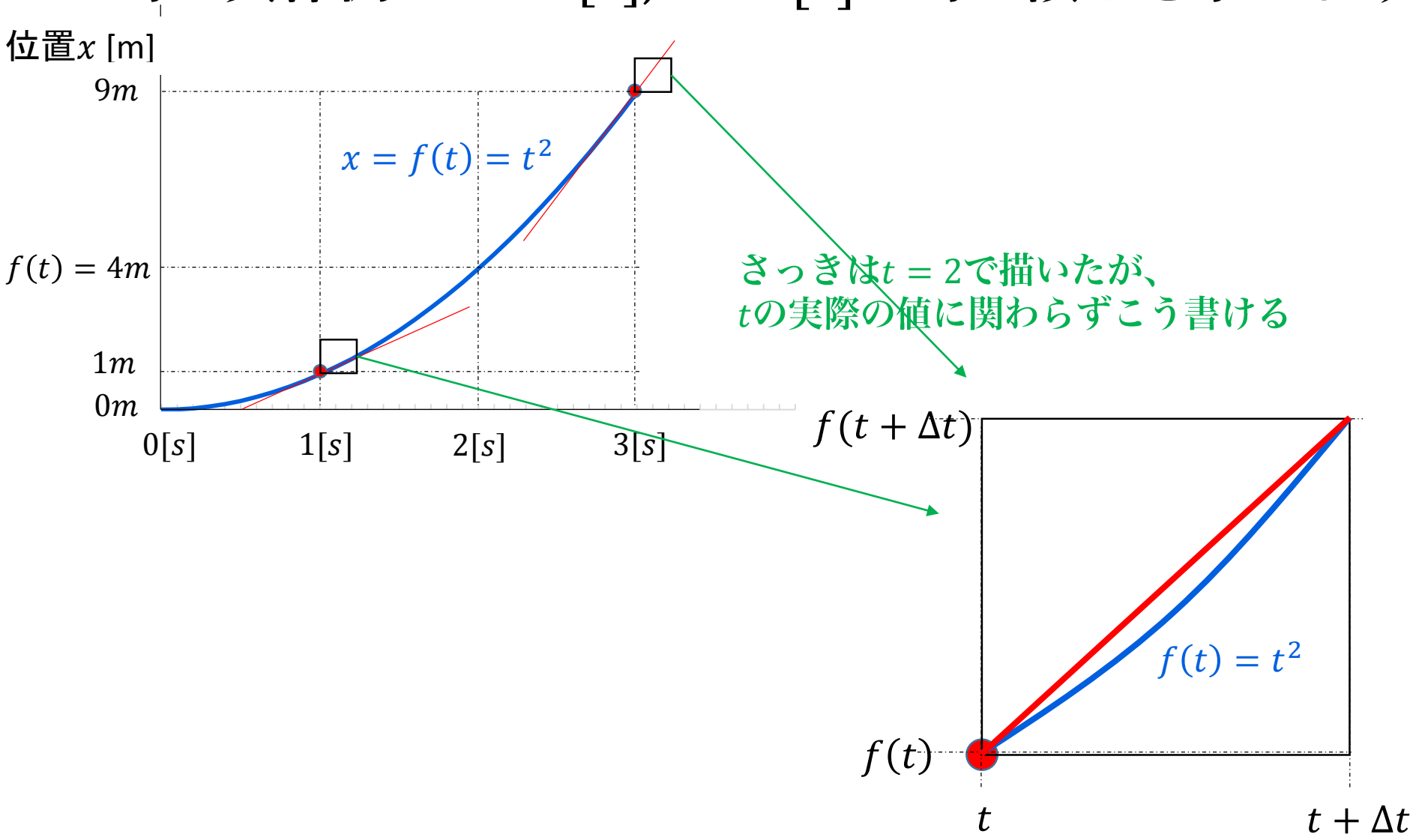


とりあえず$t = 2[s]$の時、
$v = 4[m/s]$であることは
さっき計算したので値を入れてみよう。

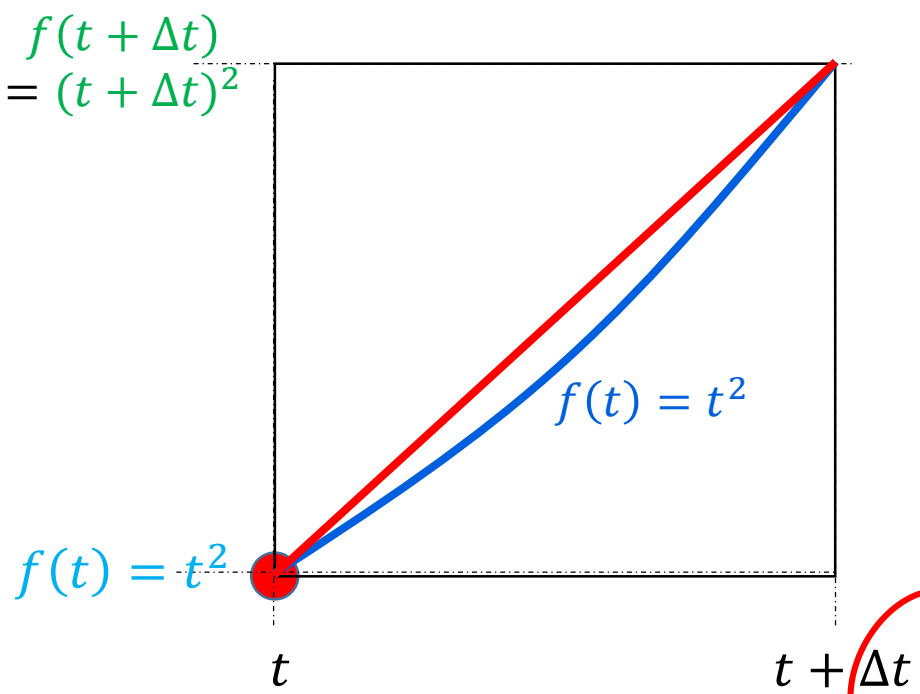
困った時の具体例：$t = 1[s], t = 3[s]$の時の傾きを求めよう！



困った時の具体例：$t = 1[s], t = 3[s]$の時の傾きを求めよう！



いま、位置$x = f(t) = t^2$の$x - t$図があります。
このとき、 一般のtにおける、瞬間の速さを考えてみましょう。



傾き=速度は $= \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

ここで、$f(t) = t^2$なので、
ここに$t + \Delta t$を代入すると

$f(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2$

傾きの式にそれらの結果を戻すと

傾き=速度は$= \dfrac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}$

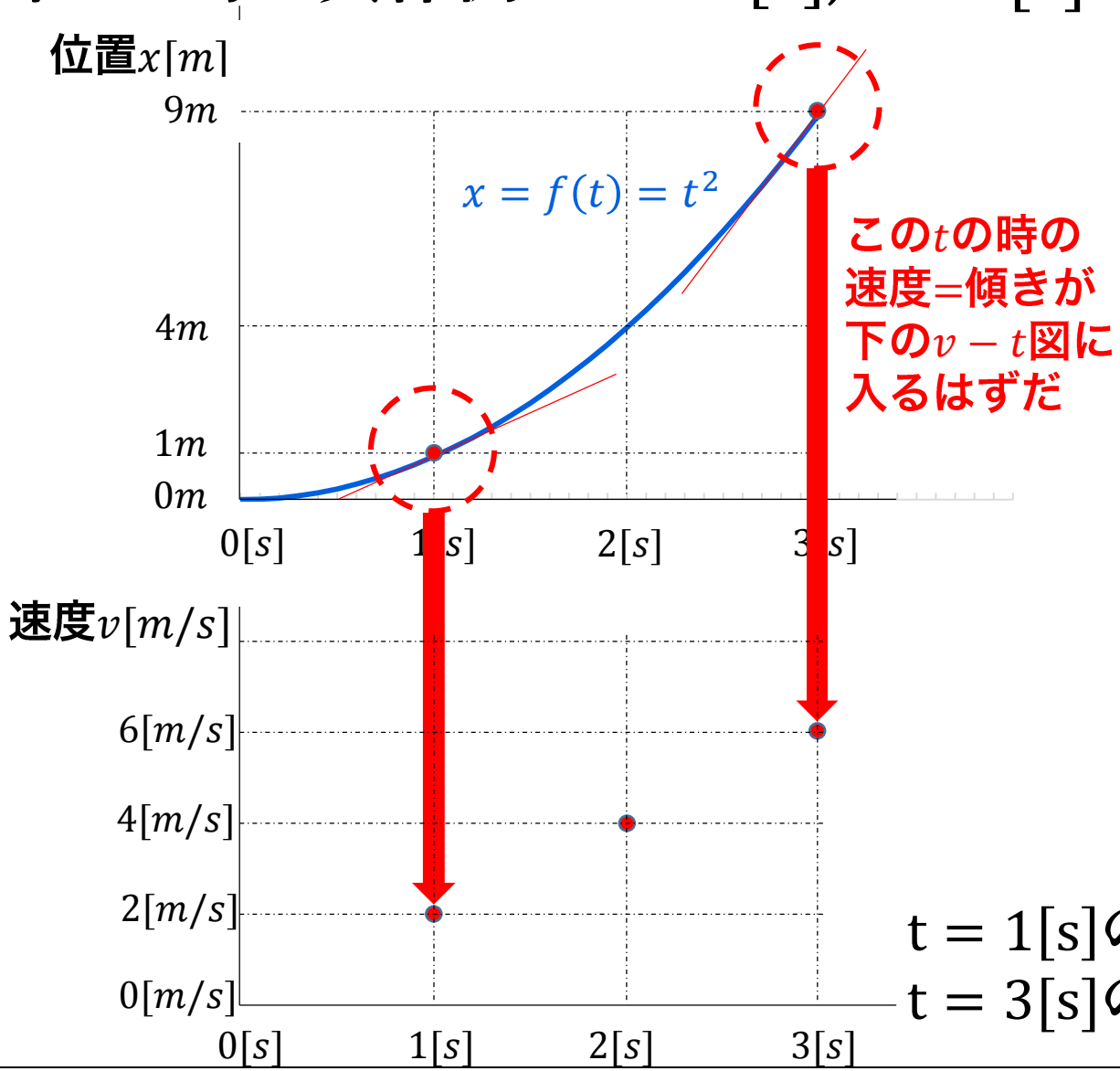
無視できる
くらい小さい

$$\boxed{\text{傾き=速度は} = \frac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2t[m/s]}$$

ていうか、
さっきも出てきたやつだ！

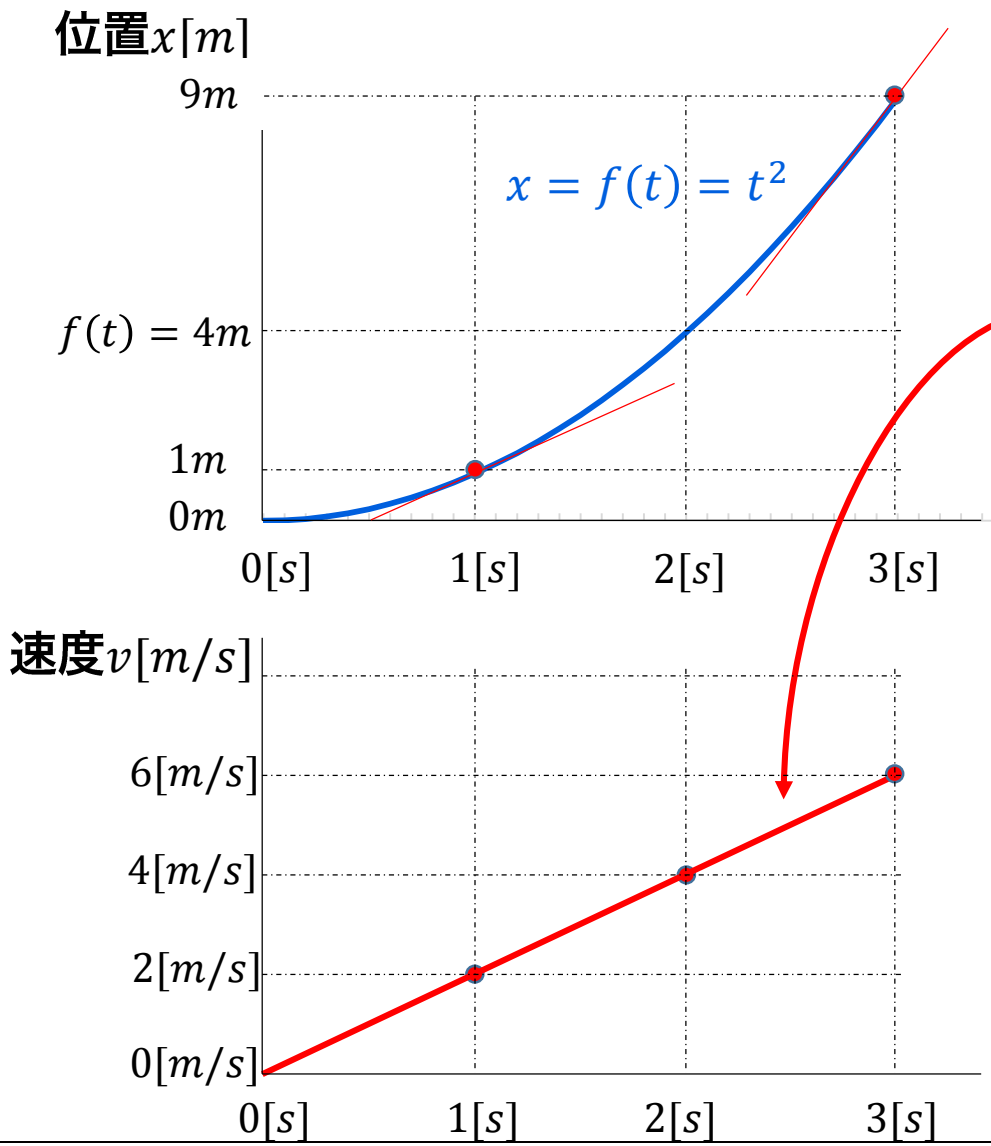
t = 1[s]の時、速度2$[m/s]$
t = 3[s]の時、速度6$[m/s]$

困った時の具体例：$t = 1[s], t = 3[s]$の時の傾きを求めよう！



t = 1[s]の時、速度2$[m/s]$
t = 3[s]の時、速度6$[m/s]$

傾き$2t[m/s]$の意味がわかってきた！

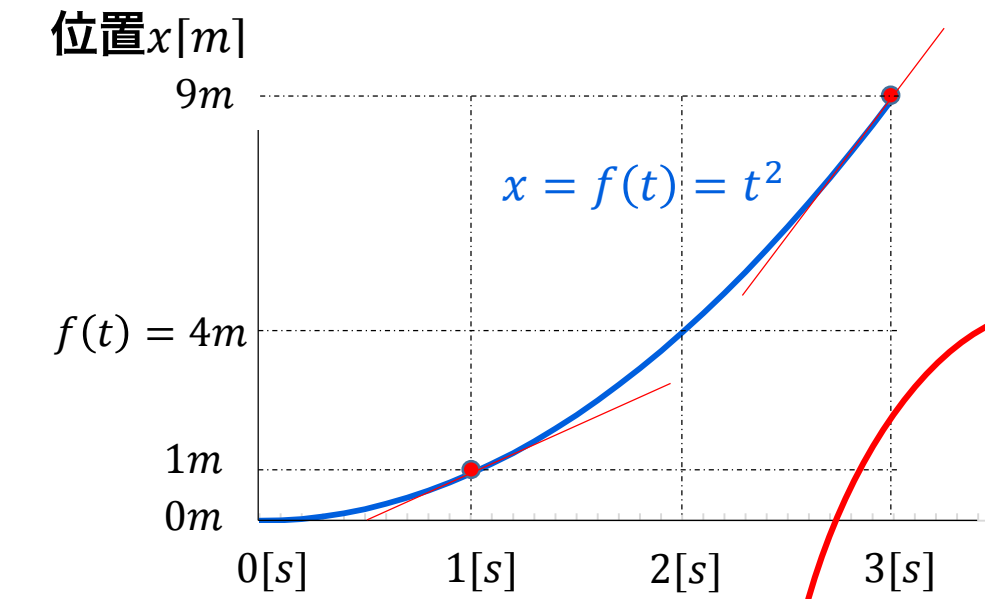


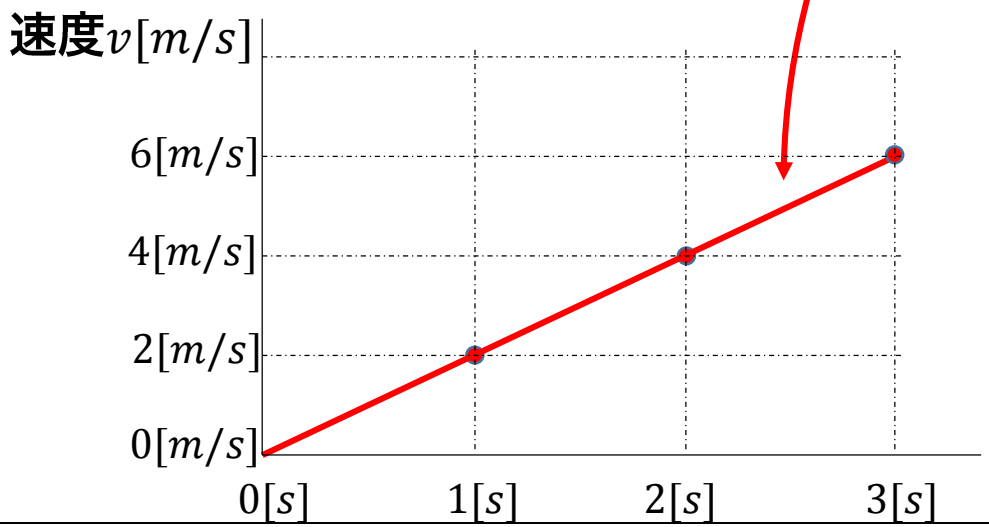
傾き=速度は $= \dfrac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2t[m/s]$

この直線は
$v(t) = 2t$と書けるだろう。

なにが「かなり凄い」か分かりますか？

傾き$2t[m/s]$の意味がわかってきた！





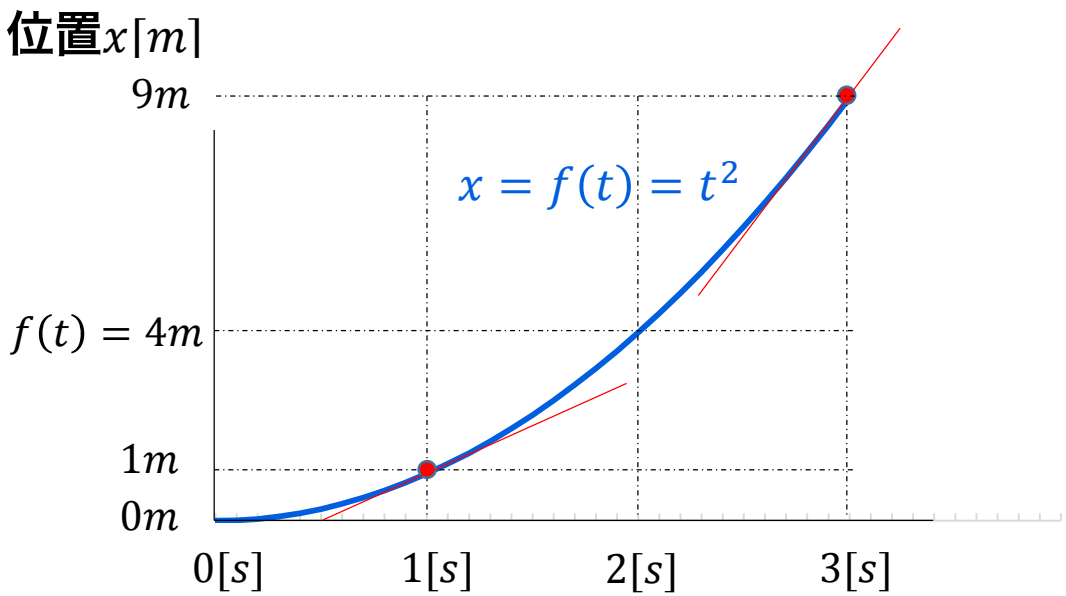
傾き=速度は $= \dfrac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2t[m/s]$

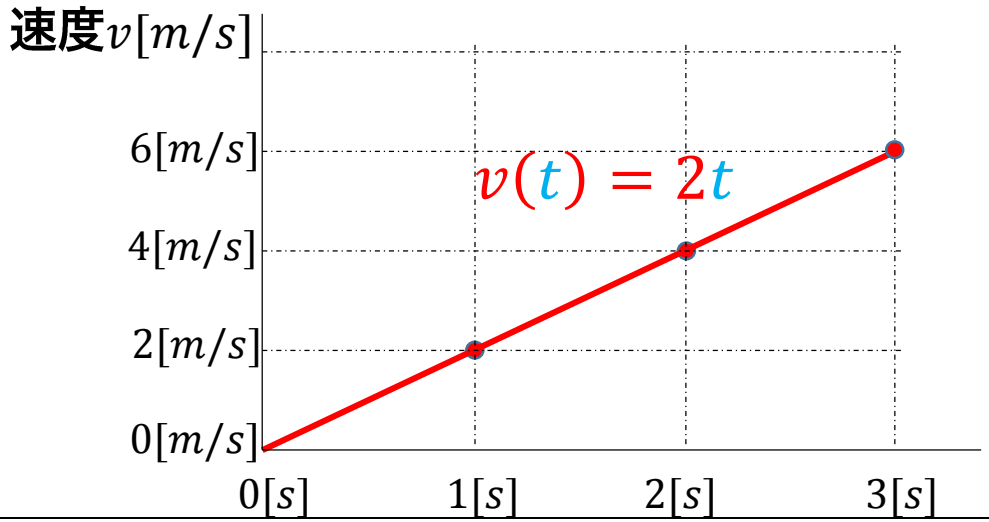
この直線は
$v(t) = 2t$と書けるだろう。

$f(t) = t^2$の各点に対し、
$v(t) = 2t$は、その瞬間の傾き=速度
を示している！

$f(t) = t^2$のグラフの時、
$v(t) = 2t$は、 tに時刻[s]を入れると、
その瞬間の傾き=速度を示せる「函数!!」

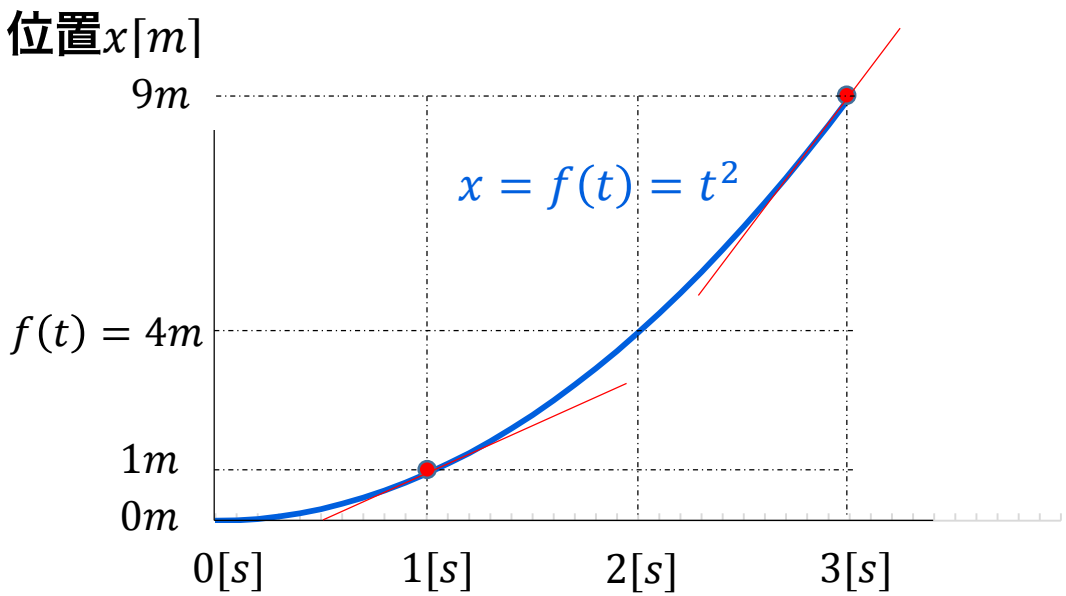
この$v-t$図の意味を日本語で書くと何でしょうか？

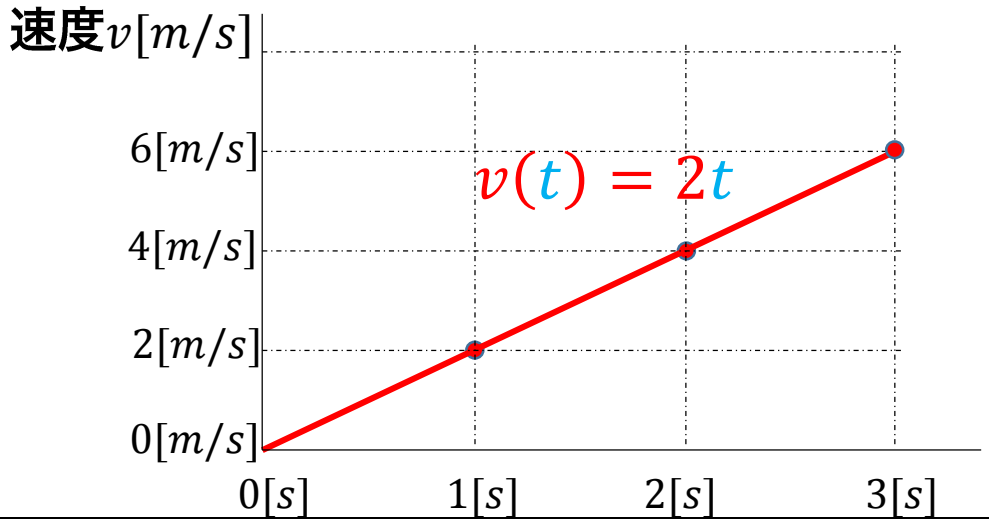




この$v-t$図の意味は？

この$v-t$図の意味：等加速度運動





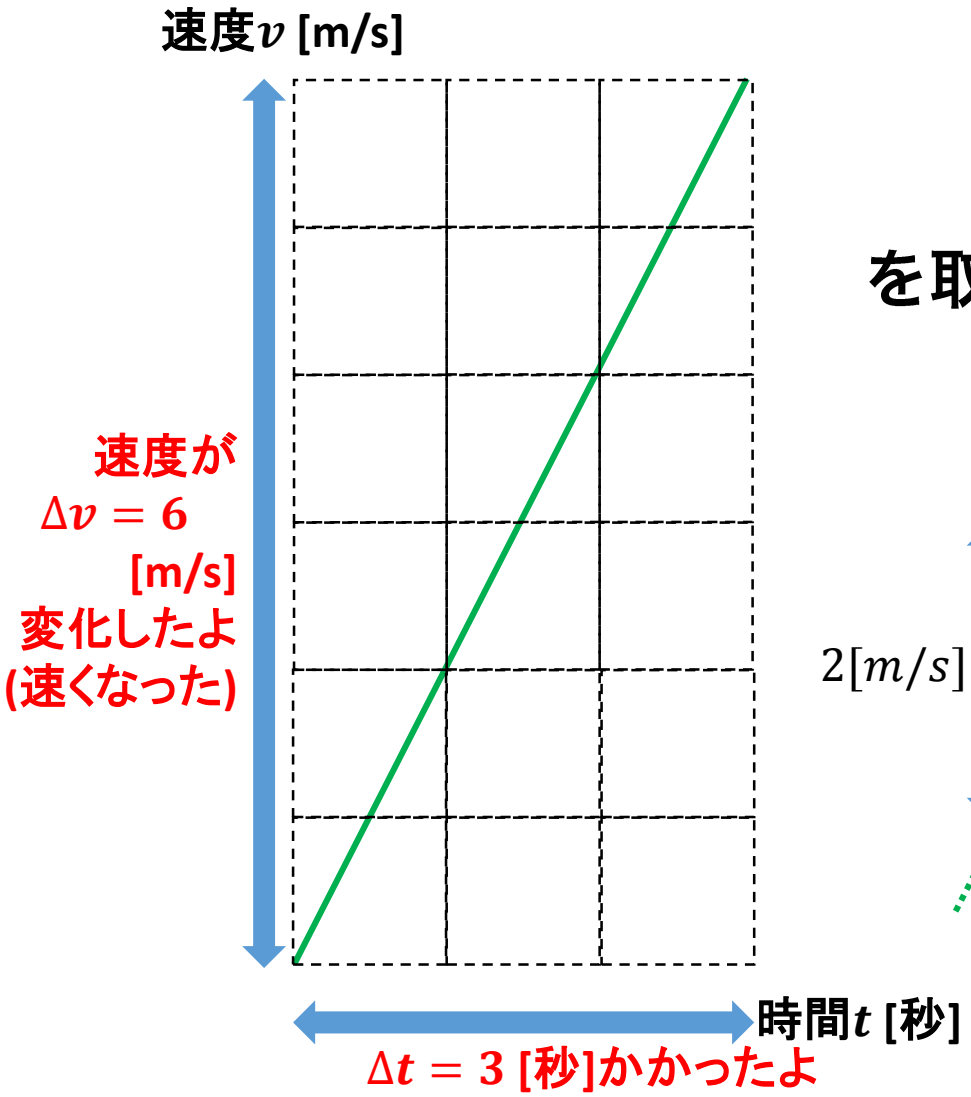
この$v-t$図の意味は、
はじめ$t=0$で初速度$v(0)=0$
だった速度が、
$t=1[s]$後には$v(1)=2[m/s]$
まで上昇し、
$1[s]$あたり$2[m/s]$の割合で
加速しているという意味である。

「加速度」とは何でしょうか

加速度とは、
「1秒間にどのくらい、速さ$[m/s]$が増えるか」
を言います。

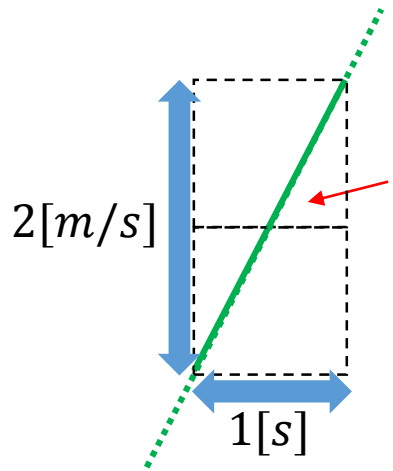
加速度は英語のaccelerationから a と呼び、
その単位は$[m/s^2]$です。「メートル毎秒毎秒」と呼びます。

加速度とは「$v-t$グラフの傾き」



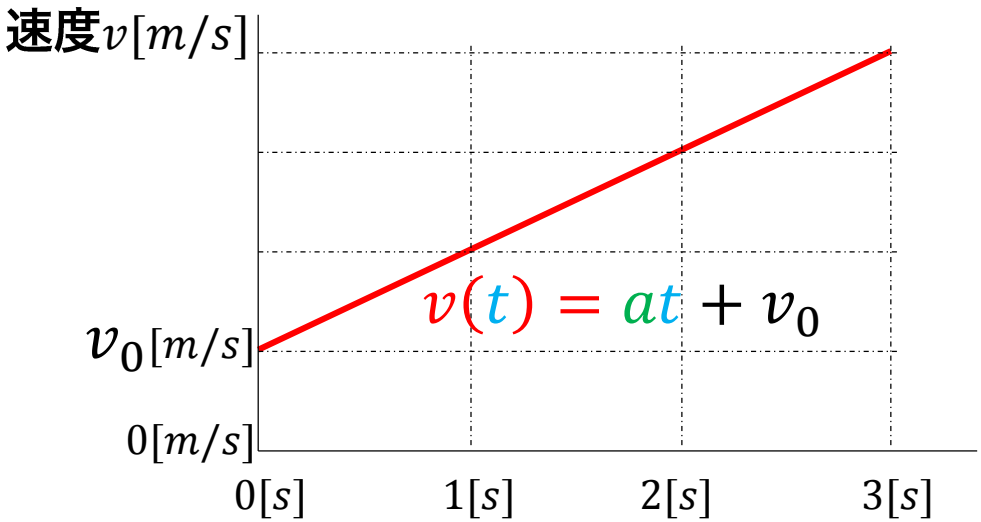
横軸に、時間t
縦軸に、速度v
を取った「$v-t$グラフ」の
傾きが加速度です。

注意！縦軸は
位置xじゃないよ



この「傾き」が「加速度」だよ
いま傾きは「$2[m/s^2]$」だよ

速度vと加速度aの関係



この図のように、
速度vが一定(定数)ではなく、

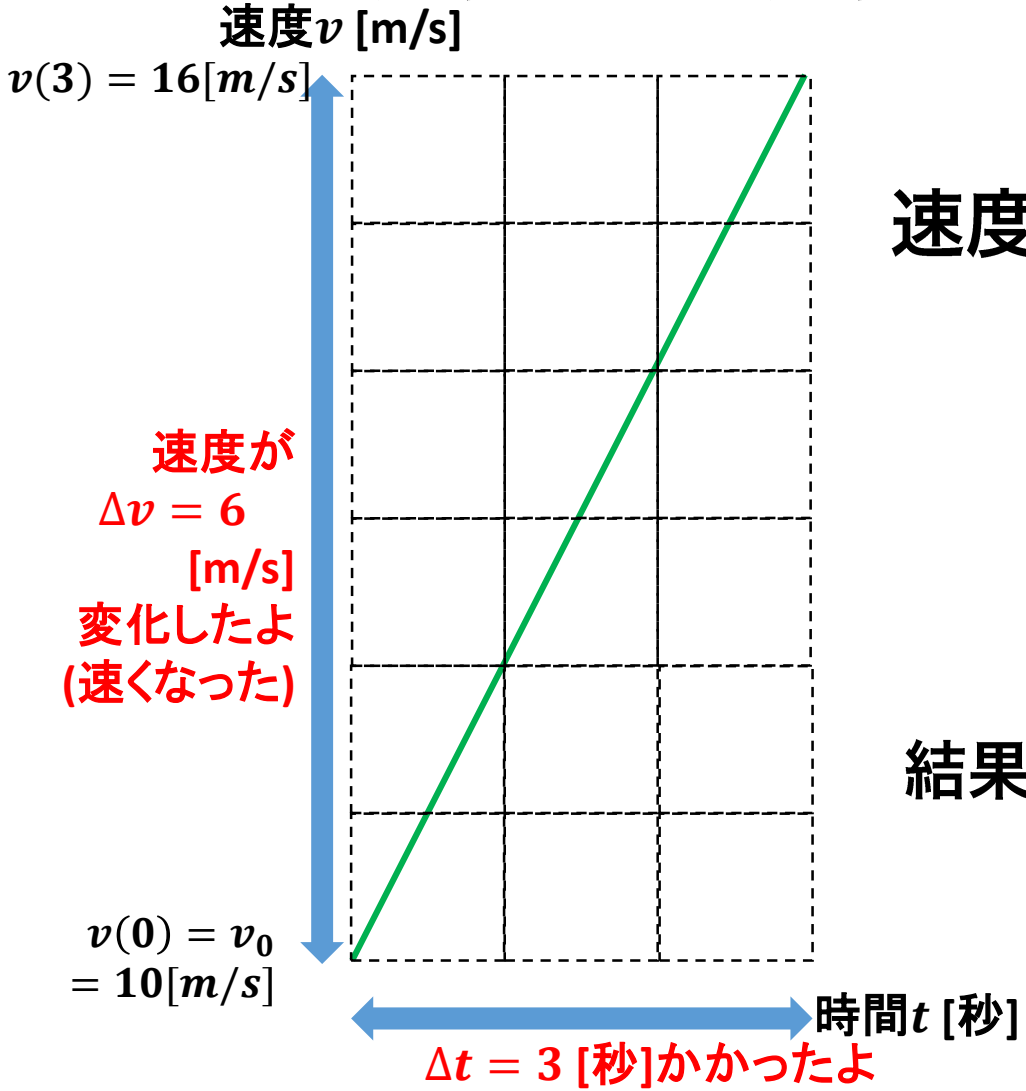
$$v(t) = at + v_0$$

のように、速度vが時間tの
一次函数となるような運動を
「等加速度運動」と呼び。

その時の傾きを加速度をaと呼ぶ

v_0とは、$t = 0$の時、つまり
はじめの速度$v(0)$のことなので、
初速度を意味する。

速度vと加速度aの関係（具体例）



速度$v(t) = at + v_0$ の意味

加速度は $a = 2[m/s^2]$ だったよ

$t = 3[s]$間 加速したよ

初めの速度は $v_0 = 10[m/s]$ だったよ

結果$v(3) = 2 \times 3 + 10 = 16[\mathrm{m/s}]$

※形としては1次函数$f(x) = ax + b$と一緒

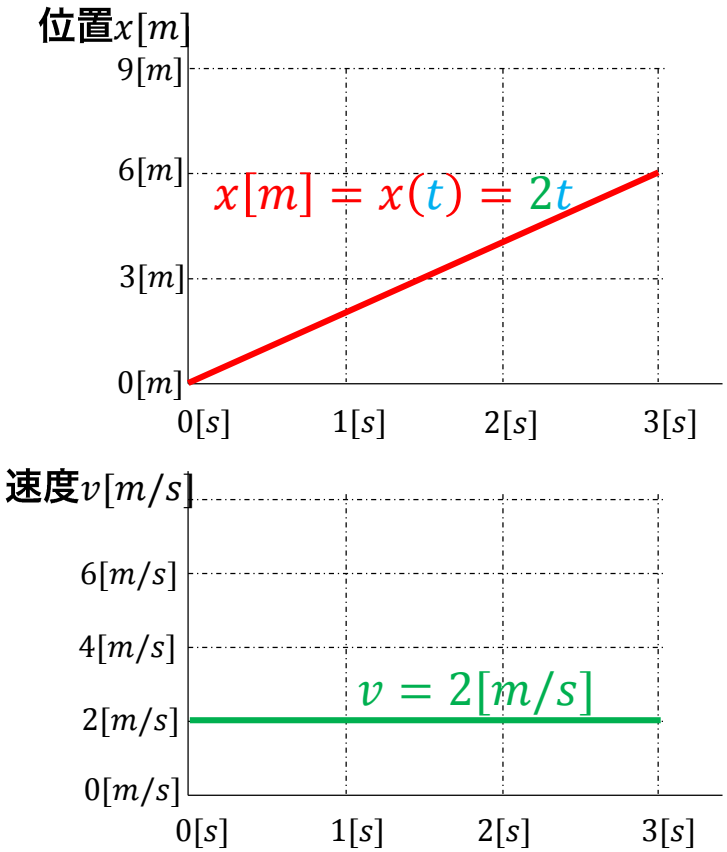
等速度運動

と

等加速度運動のちがい

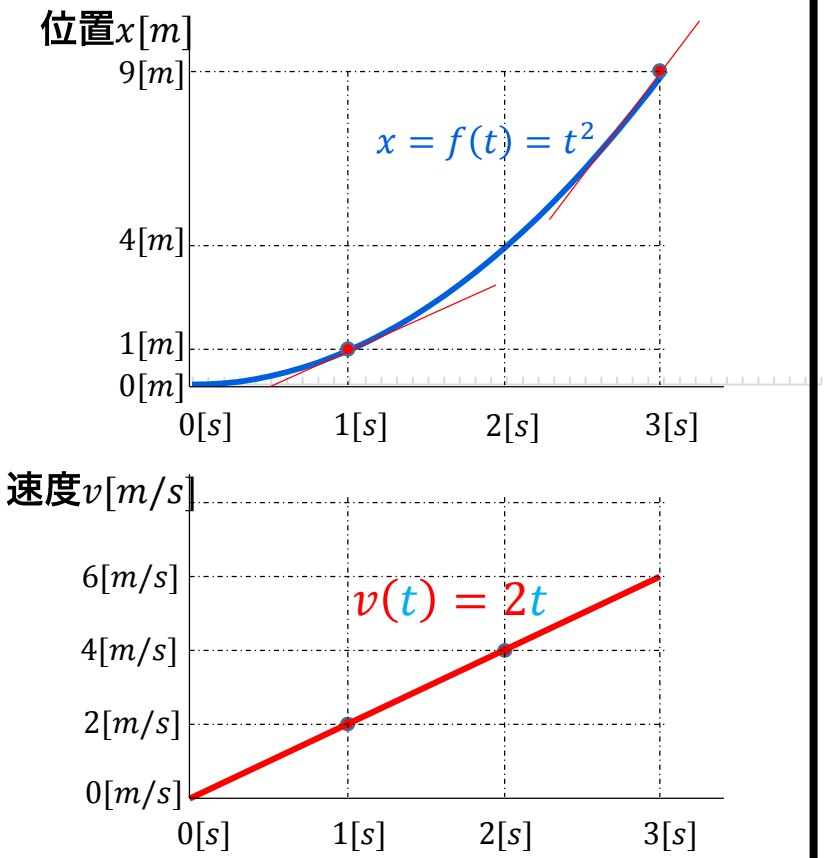
等速度運動と等加速度運動のちがい

等速度運動



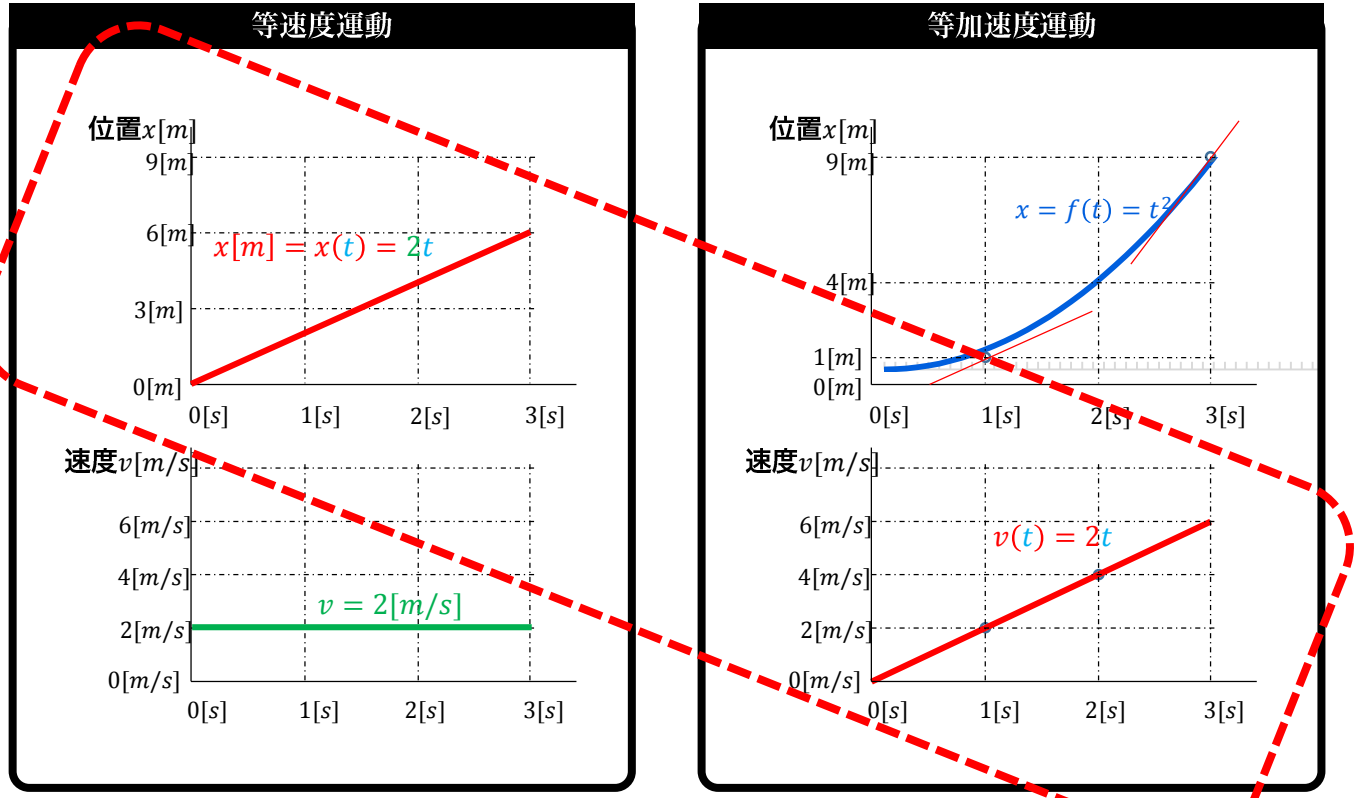
このv − t図のv が変わらないから「等速度」

等加速度運動



このv − t図のv が一定の割合で
増える＝加速するから「等加速度」

なんか似てます、よ、ね？



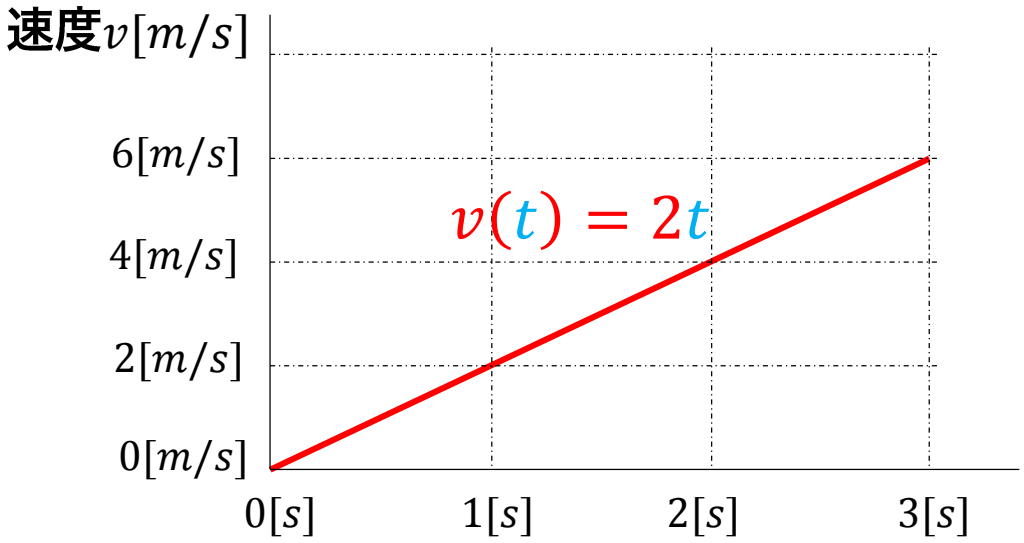
この「等速度運動」の$x-t$図　と

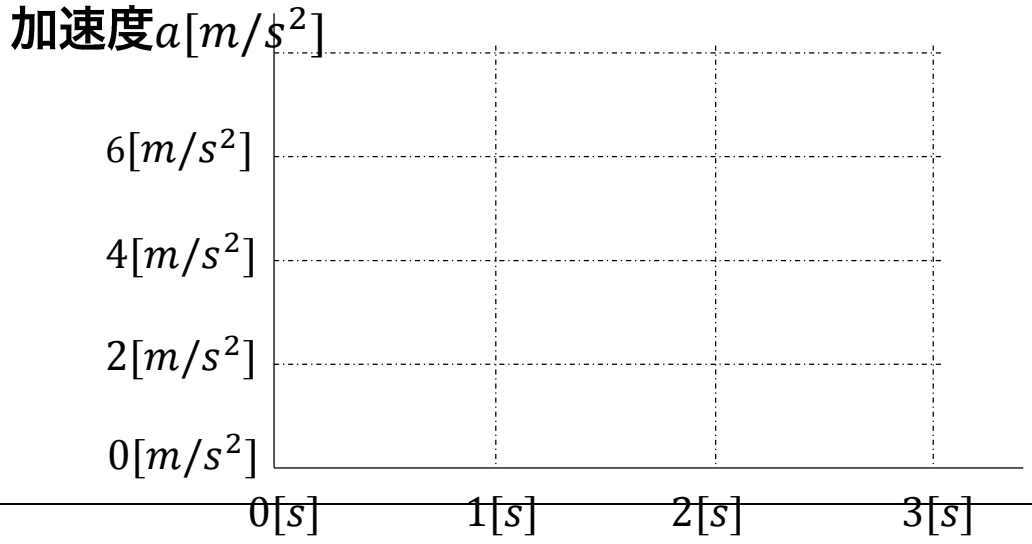
「等加速度運動」の$v-t$図が
似ている気がします。

ちょうど等速度運動で
$x-t$図から$v-t$図を描いたように、

等加速度でも$v-t$図から$a-t$図
が描けないだろうか？

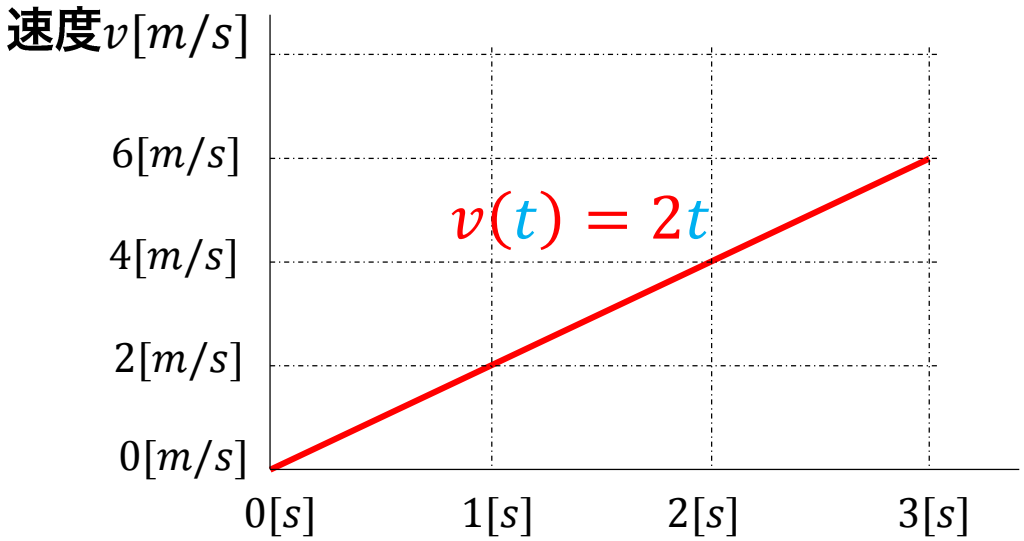
この$v-t$図から$a-t$図を描いてみよう。

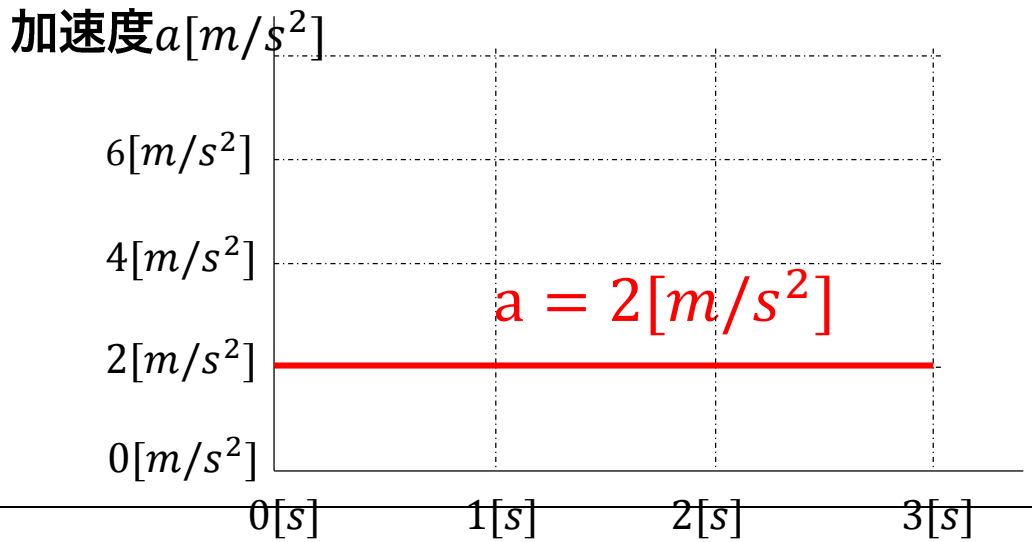




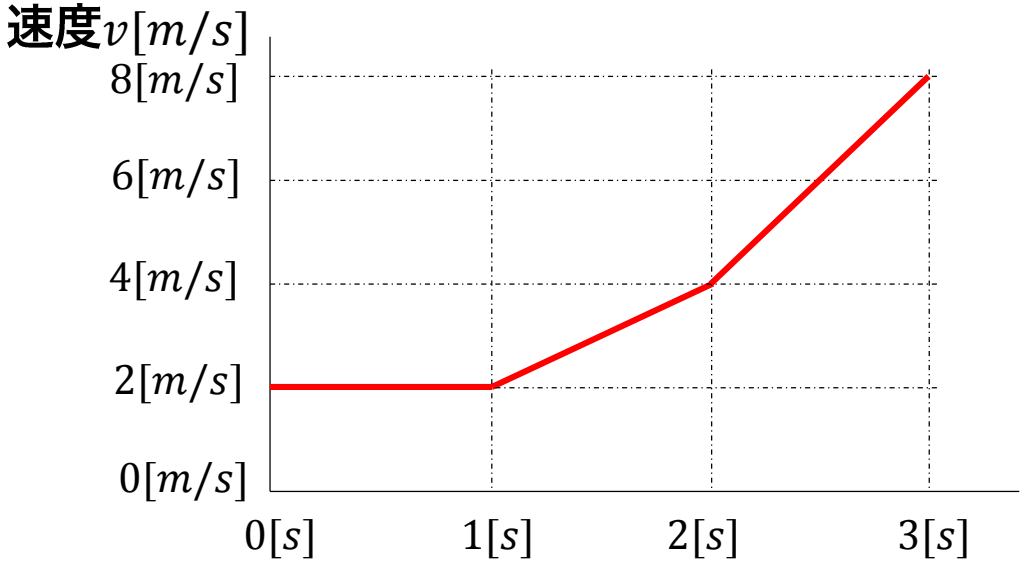
$a-t$図とは、
横軸に時間
縦軸に加速度
をとったグラフのこと。

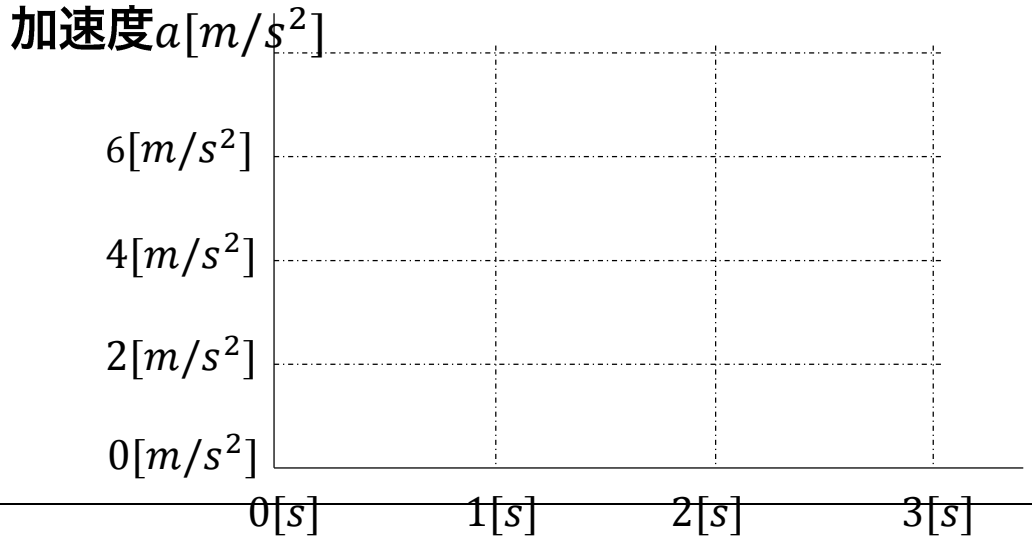
この$v-t$図から$a-t$図を描いてみよう



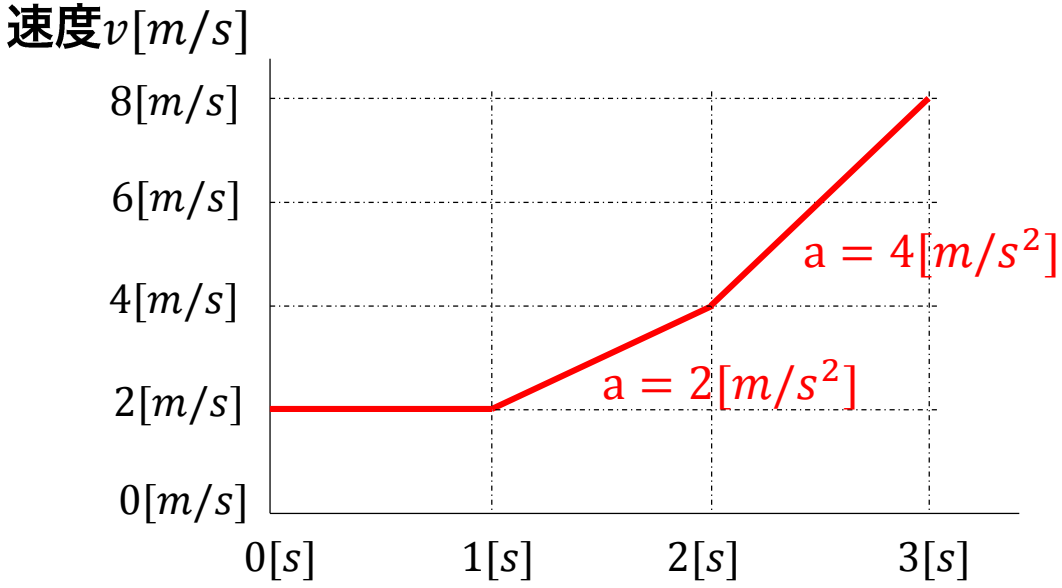


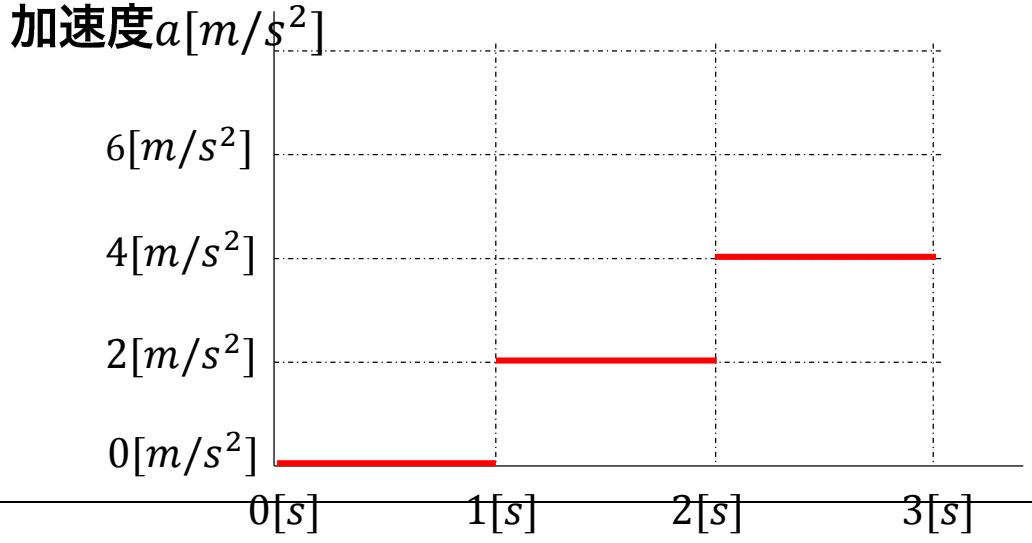
練習問題：この$v-t$図から$a-t$図を描いてみよう





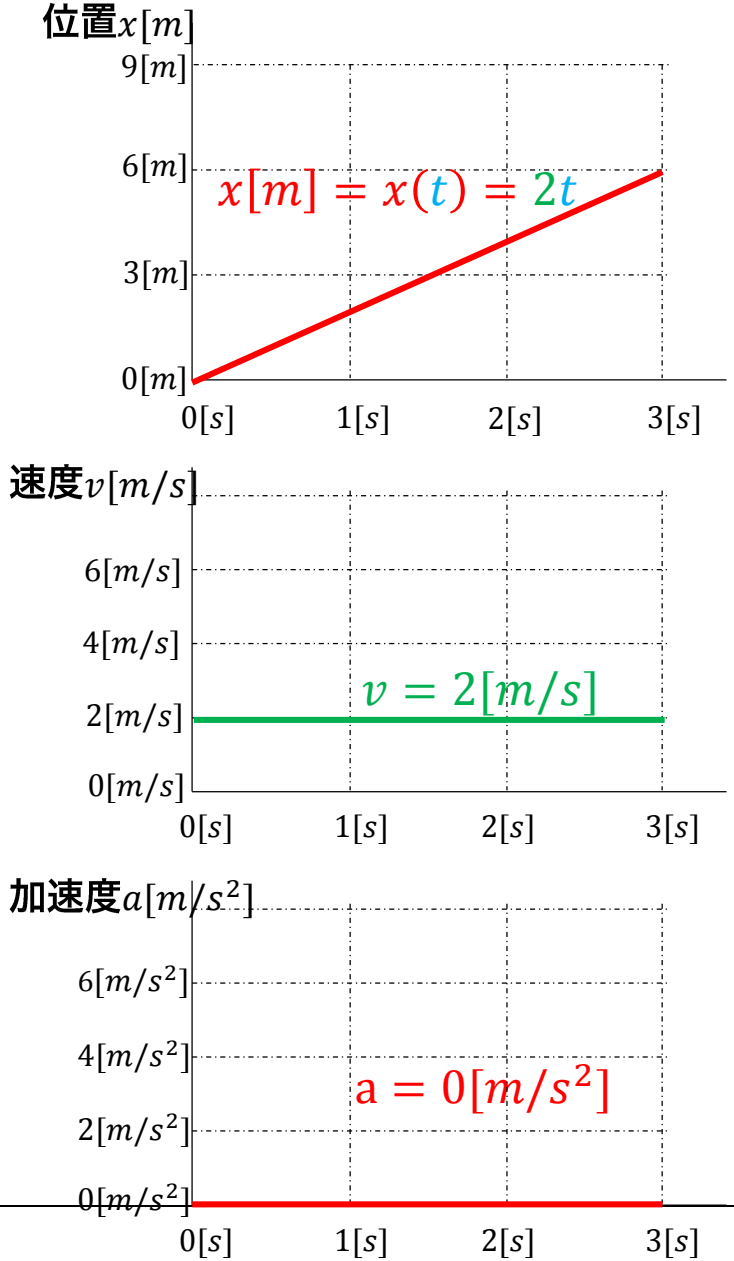
練習問題：この$v-t$図から$a-t$図を描いてみよう



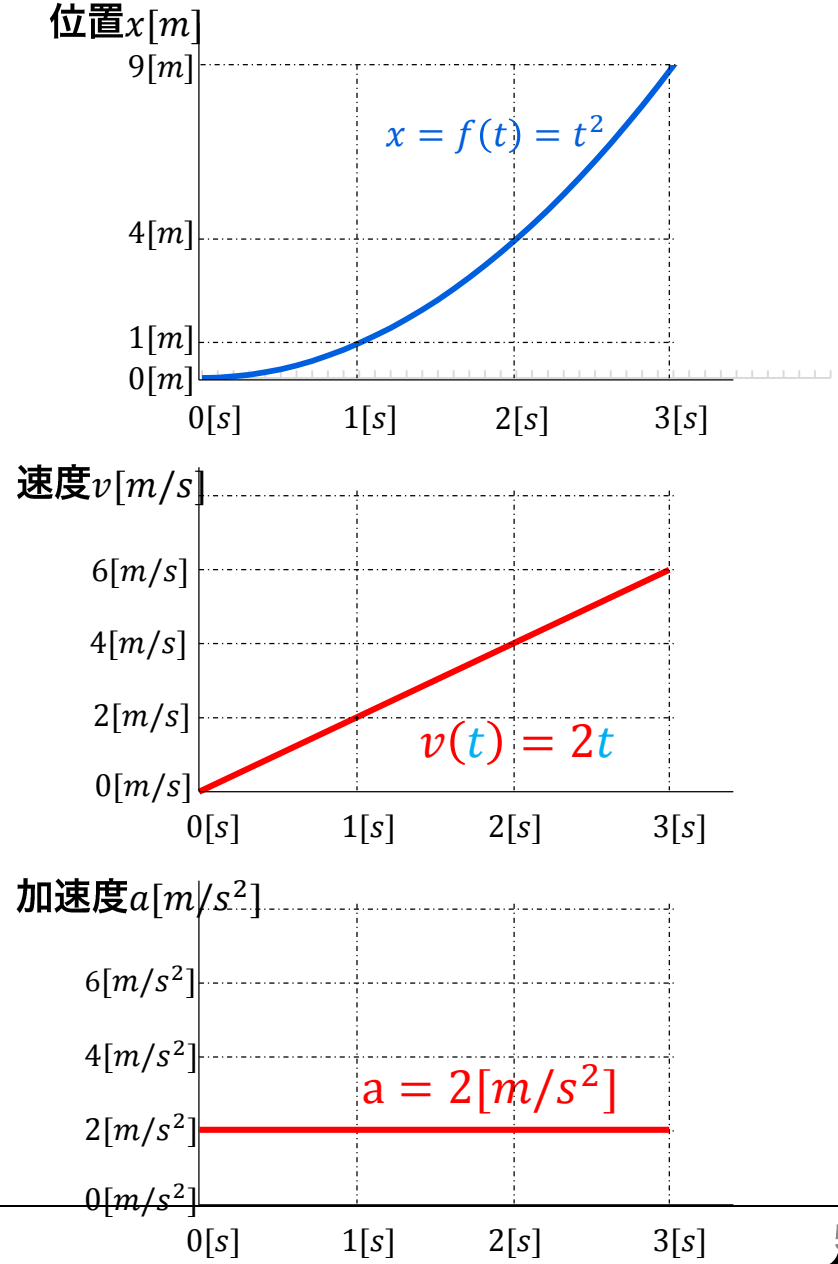


等速度運動と等加速度運動のちがい

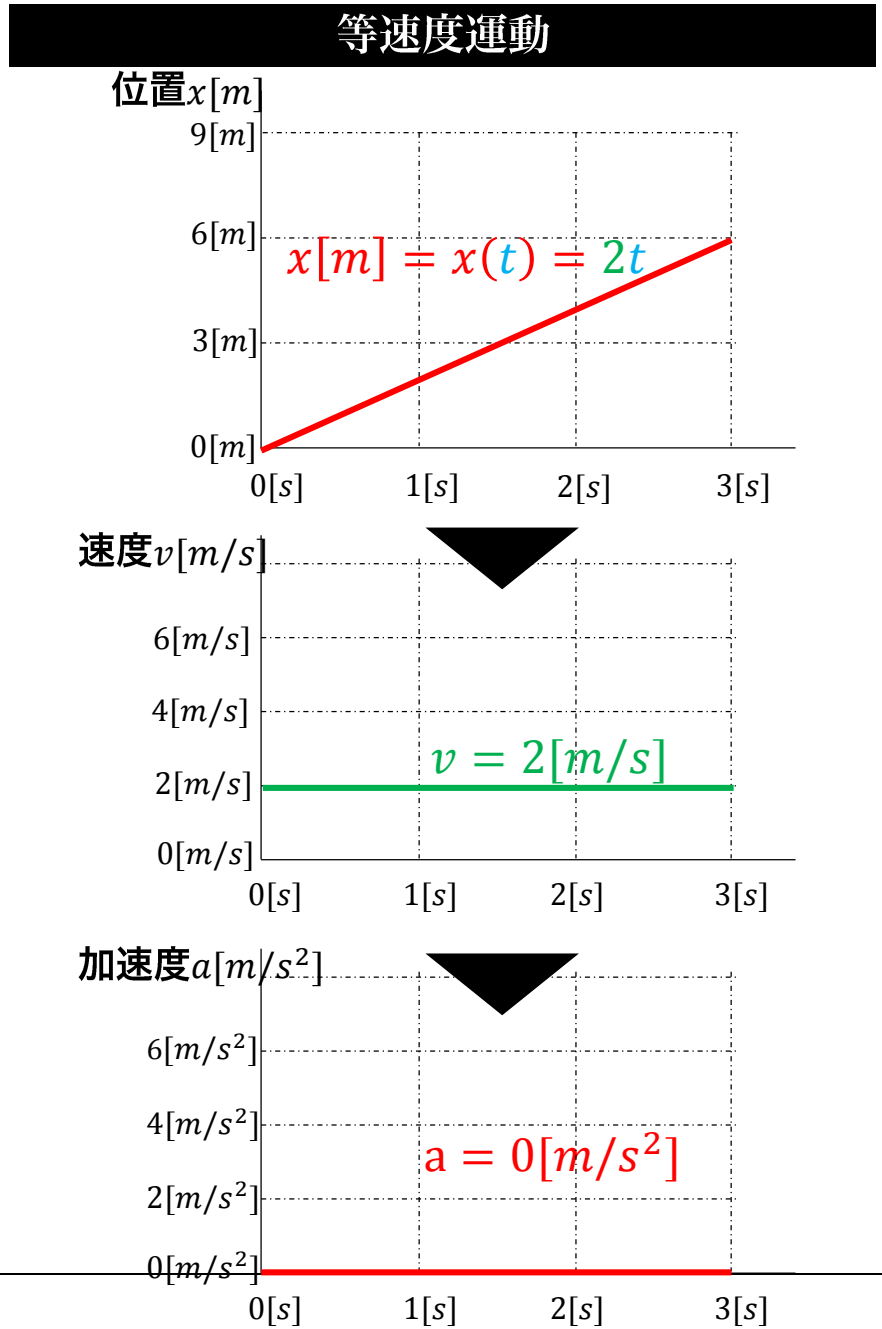
等速度運動

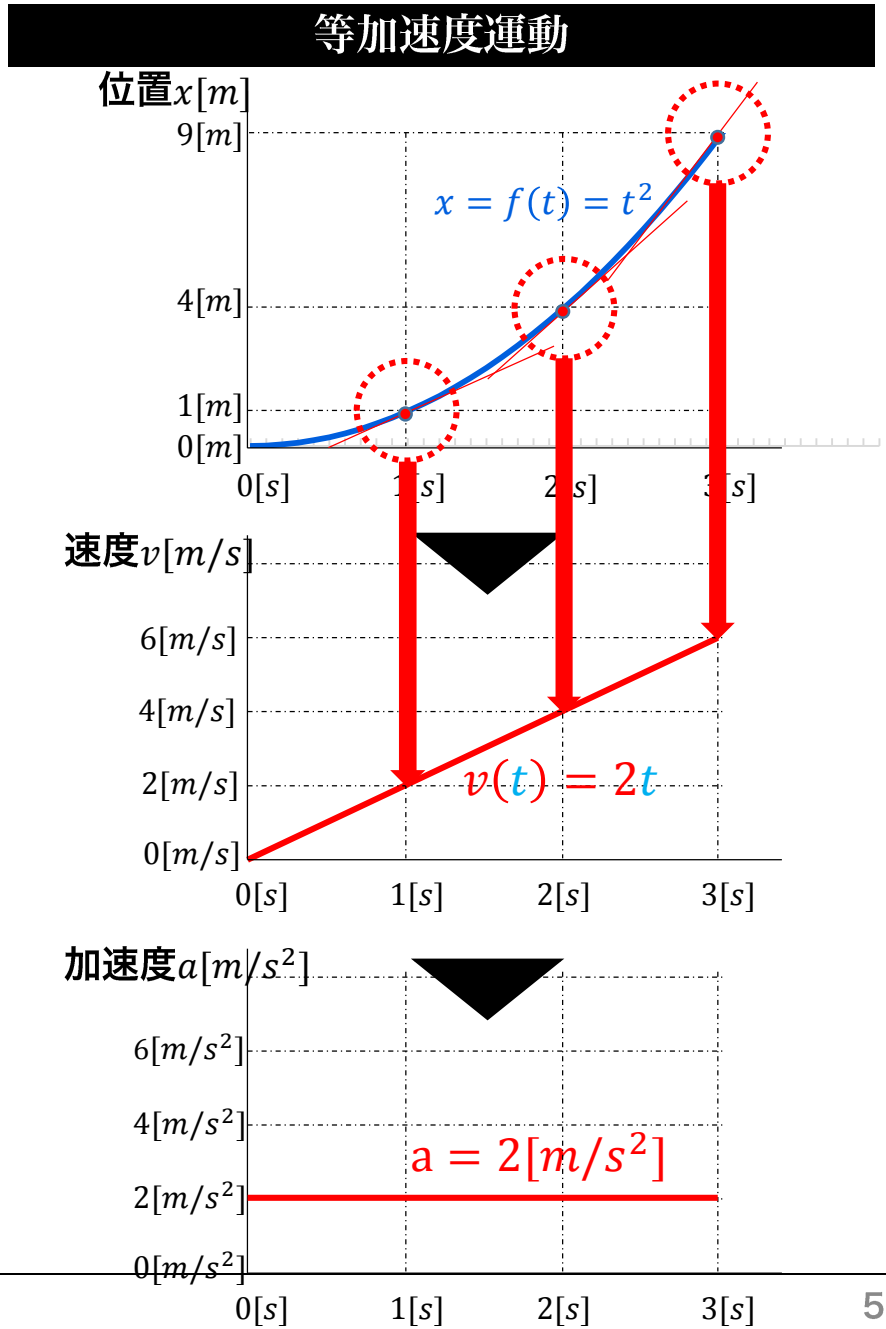


等加速度運動



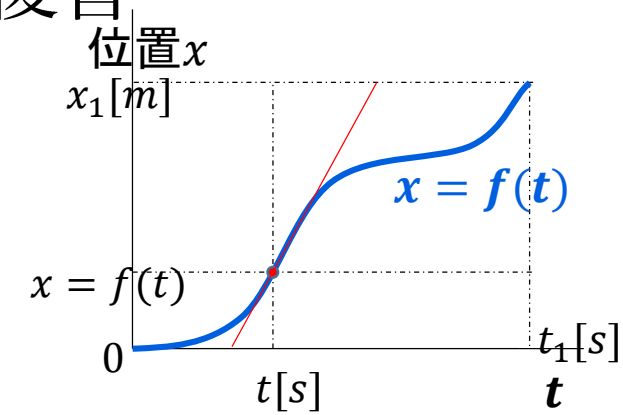
上のグラフの各点での傾きが、下のグラフの各点の値になっている!





ここまでの、復習をしましょう。

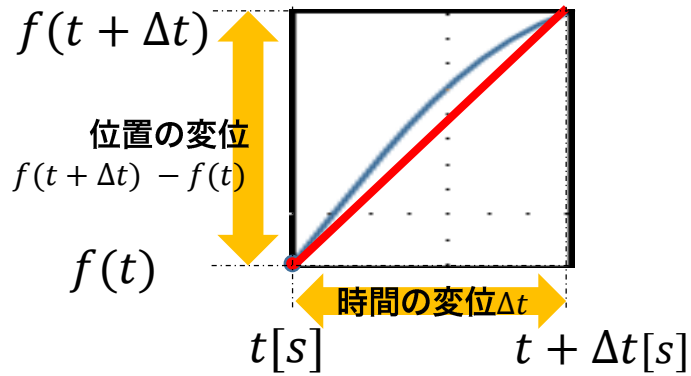
ここまでの復習



①等速度運動は実際には難しい。だから
「いま、この瞬間の」速度が知りたい。

②速度は$x-t$図の傾き。ただし$x-t$図に
直線が無い場合、速度は接線の傾き。

③時刻tでの速度＝接線の傾きは、右図
のように、時刻$t+\Delta t$の傾きを求め、
$\Delta t \to 0$に近づければ良い。

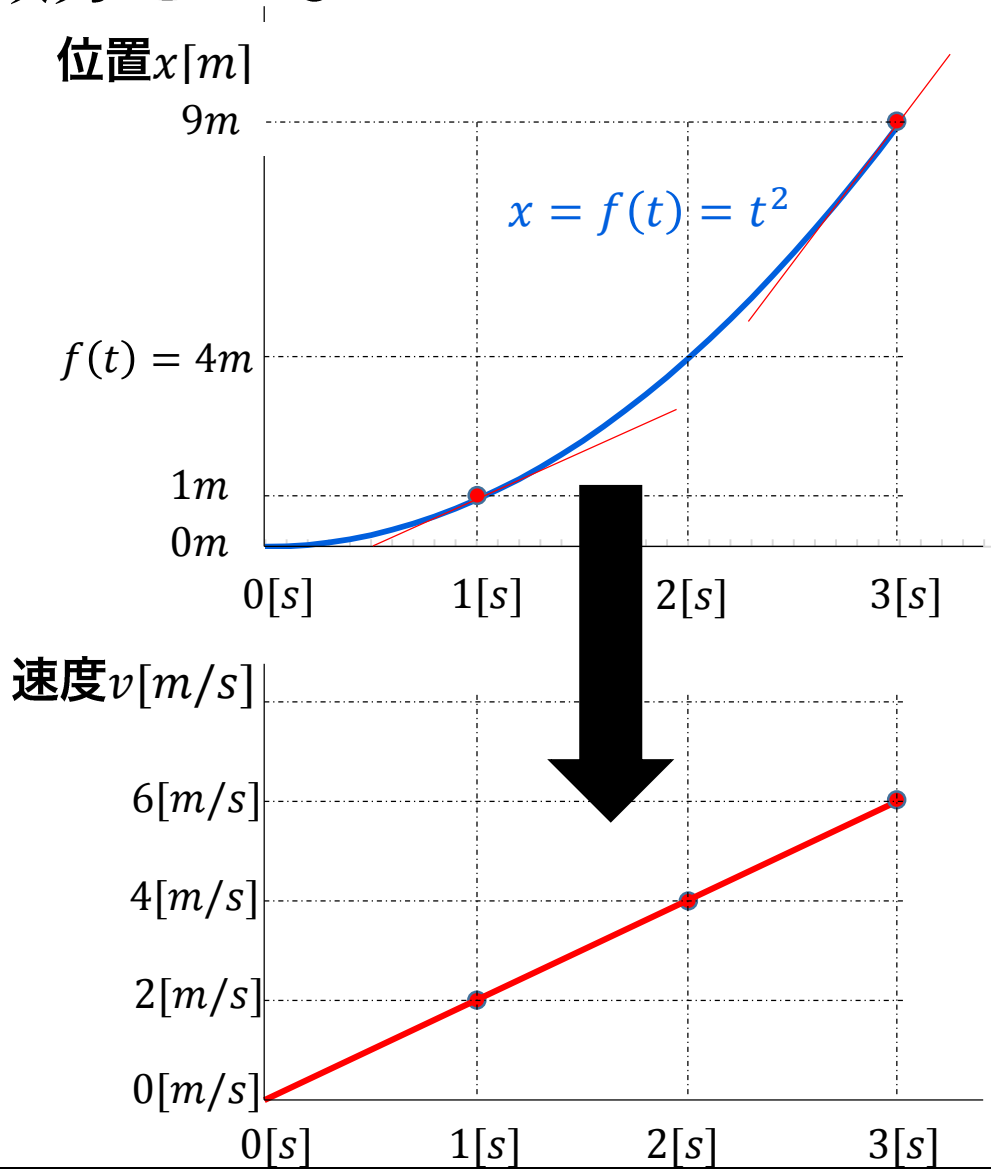


④接線の傾きは、函数の形で得られる。

⑤ vが一定の割合で増える時、等加速度運動という。

⑥ $x-t$図の傾きが$v-t$図。$v-t$図の傾きが$a-t$図。

微分とはなにか

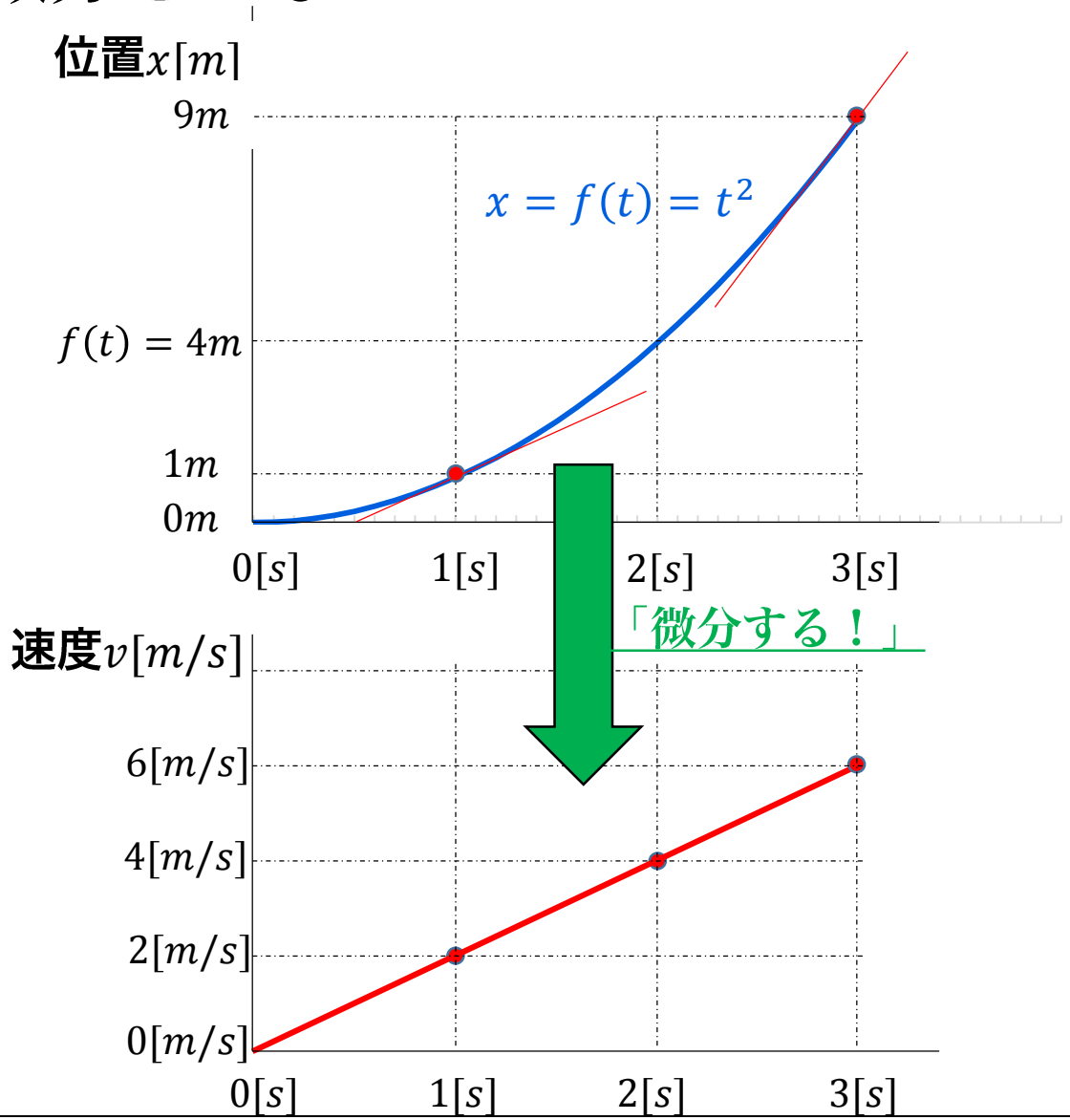


このように、ある函数から、その函数の「傾きの函数」を得ました。

この「傾きの函数」のことを正式には「**導函数(どうかんすう)**」と呼びます。

用例：$v(t)$は$f(t)$の導函数

微分とはなにか



この**導函数**を得ることを
$f(t)$を「微分する」と言います。

微分とはなにか

~~よくある誤解：~~
~~$f(t)$を「微分する」と傾きが求まる。~~

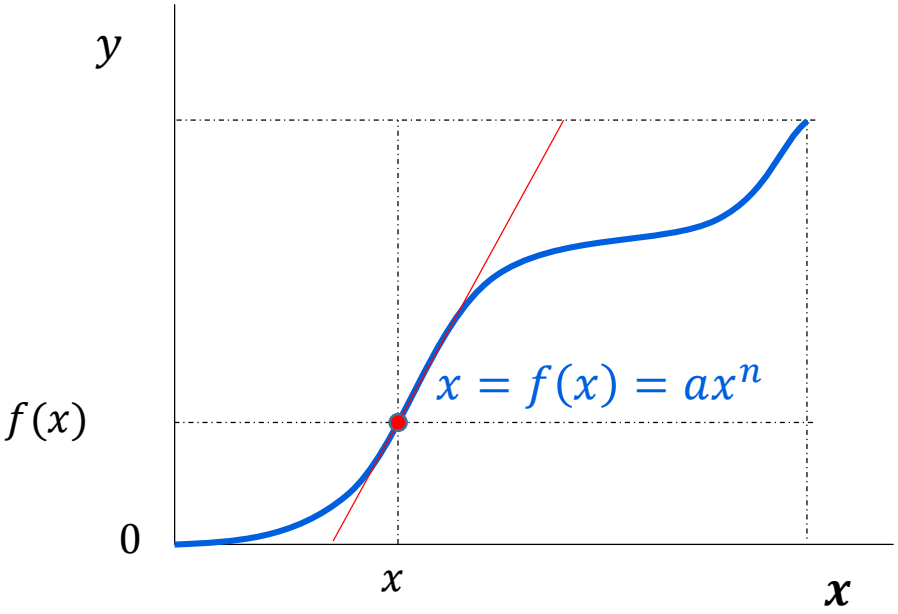
▼

ほんとうのこと：
$f(t)$を「微分する」と
傾きの函数＝導函数$v(t)$が求まる。

tに具体的な値、例えば$t = 2$を入れると
$f(t)$ 上の 点$(2, f(2))$ における傾き $v(2)$ が得られる。

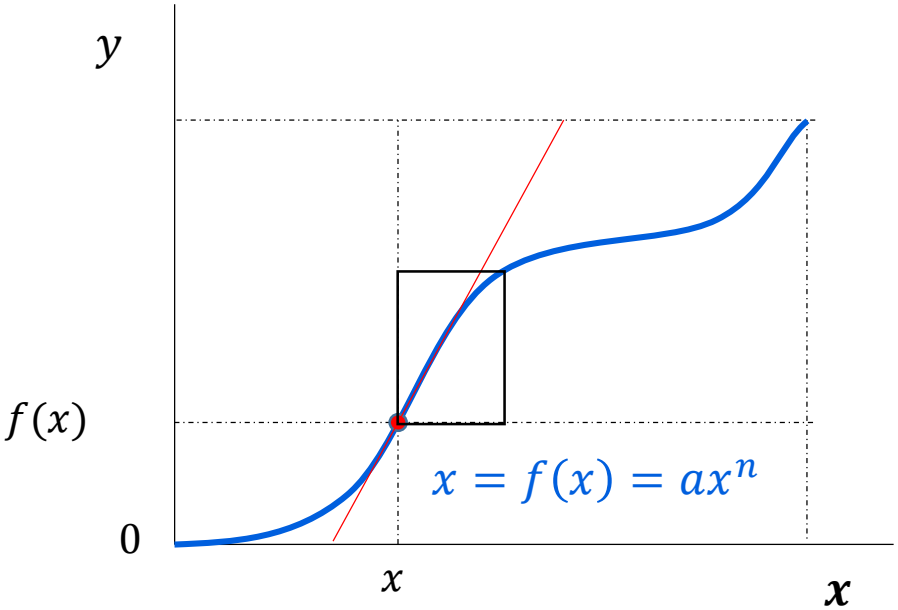
数学の練習

この曲線を、位置$f(x) = ax^n$のグラフをxで微分してみましょう！
(こんどは数学っぽく、$x - t$図でなくxy平面にしてみました)

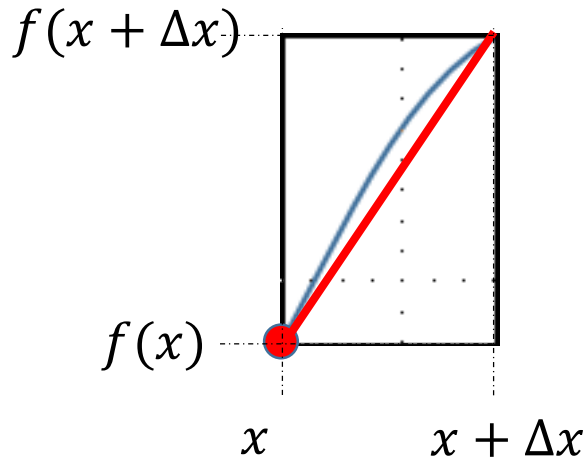


Back to the Basics.

ブレずに、これまで通り、四角形を取りましょう。

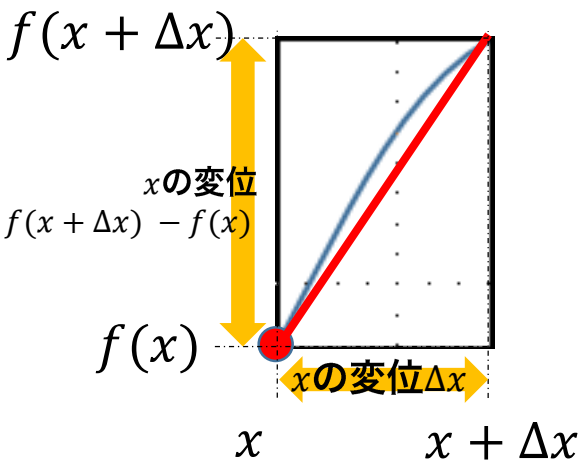


拡大



数学の練習

ブレずに、これまで通り、四角形を取りましょう。

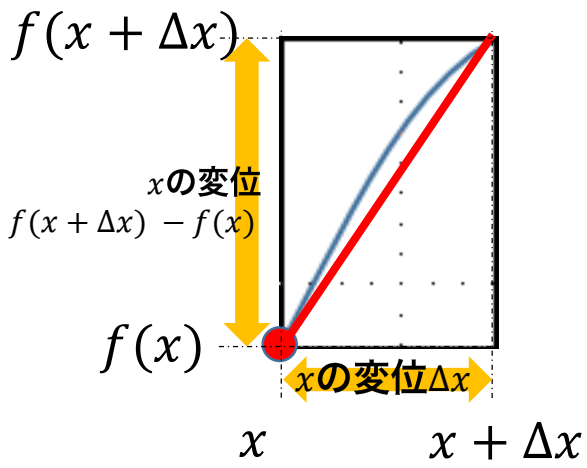


傾きは

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

いま、位置$f(x) = ax^n$の函数があります。



傾きは $= \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ここで、$f(x) = ax^n$なので、
ここに$x + \Delta x$を代入すると

$f(x+\Delta x) = a(x+\Delta x)^n$

傾きの式にそれらの結果を戻すと

傾き=速度は$= \dfrac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x}$

$(x+\Delta x)^n$

とりあえず、これが計算上手にできたら、
なんかうまくいきそう！

$(x+\Delta x)^n$を求めよう！小さい数で実験してみましょうか。

$(x+\Delta x)^n$

とりあえず、xをaに、Δxをbに置き換えましょう。
見た目が簡単になるからです。

$(a+b)^n$=???

$n=1$の時、$(a+b)^1=a+b$

$n=2$の時、$(a+b)^2=$

$n=3$の時、$(a+b)^3=$

$(x+\Delta x)^n$を求めよう！小さい数で実験してみましょうか。

$(x+\Delta x)^n$

とりあえず、xをaに、Δxをbに置き換えましょう。
見た目が簡単になるからです。

$(a+b)^n$=???

$n=1$の時、$(a+b)^1 = a+b$

$n=2$の時、$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$n=3$の時、$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

$$= (a^3+2a^2b+ab^2)+(a^2b+2ab^2+b^3)$$

$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$(x+\Delta x)^n$を求めよう！。小さい数で実験してみましょうか。

$n=1$の時、$(a+b)^1=$ $a + b$

$n=2$の時、$(a+b)^2=$ $a^2 + 2ab + b^2$

$n=3$の時、$(a+b)^3=$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

これらを、aにx、bにΔxを戻して、元の式に入れてみましょうか。

傾き=速度は$=\dfrac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x}$

$(x+\Delta x)^n$

$(x+\Delta x)^n$を、 $n=1$の時、元の式に戻してみよう！

$n=1$の時、$(x+\Delta x)^1 = x+\Delta x$

$n=1$を代入して、
$(x+\Delta x)^1$を$x+\Delta x$に置き換えている。

傾き=速度は $= \dfrac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x} \Rightarrow \dfrac{a(x+\Delta x) - ax^1}{\Delta x}$

$$= \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

よって、結論。

$f(x) = ax^n$のグラフは、$n=1$のとき、すなはち
$f(x) = ax^1 = ax$のとき、xで微分すると、
導函数(傾きの函数)はaである。

$(x+\Delta x)^n$を、 $n=2$の時、元の式に戻してみよう！

$n=2$の時、$(x+\Delta x)^2=$
$x^2+2x\Delta x+\Delta x^2$

$n=2$を代入して、
$(x+\Delta x)^2$を$x^2+2x\Delta x+\Delta x^2$に
置き換えているだけ。

傾き=速度は $=\dfrac{a(x+\Delta x)^n-ax^n}{\Delta x}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)-ax^2}{\Delta x}$

$$=\frac{ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2-ax^2}{\Delta x}=\frac{2ax\Delta x+a\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$=\frac{2ax\Delta x}{\Delta x}=2ax$$

無視できる
くらい小さい

よって、結論。

$f(x)=ax^n$のグラフは、$n=2$のとき、すなはち
$f(x)=ax^2$のとき、xで微分すると、
導函数(傾きの函数)は$2ax$である。

$(x+\Delta x)^n$を、 $n=3$の時、元の式に戻してみよう！

$n=3$の時、$(x+\Delta x)^3=$
$x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$

$n=3$を代入して、
$(x+\Delta x)^3$を$x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$に
置き換えているだけ。

傾き=速度は $=\dfrac{a(x+\Delta x)^n-ax^n}{\Delta x}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3)-ax^3}{\Delta x}$

$$=\frac{ax^3+3ax^2\Delta x+3ax\Delta x^2+a\Delta x^3-ax^3}{\Delta x}=\frac{3ax^2\Delta x+\boxed{3ax\Delta x^2+a\Delta x^3}}{\Delta x}$$

$$=\frac{3ax^2\Delta x}{\Delta x}=3ax^2$$

Δx^2もΔx^3も
無視できる
くらい小さい

よって、結論。
$f(x)=ax^n$のグラフは、$n=3$のとき、すなはち
$f(x)=ax^3$のとき、xで微分すると、
導函数(傾きの函数)は$3ax^2$である。

$f(x) = ax^n$の微分

これまでの導出をまとめます。$f(x) = ax^n$のグラフは、

$n = 1$のとき、すなはち
$f(x) = ax$のとき、xで微分すると、導函数(傾きの函数)はaである。

$n = 2$のとき、すなはち
$f(x) = ax^2$のとき、xで微分すると、導函数(傾きの函数)は$2ax$である。

$n = 3$のとき、すなはち
$f(x) = ax^3$のとき、xで微分すると、導函数(傾きの函数)は$3ax^2$である。

ここで、そろそろ「xで微分すると、導函数(傾きの函数)は」と
書くのが疲れてきました。あたらしい記号を導入したいと思います。
$f(x)$をxをで微分した導函数のことを、

$f'(x)$ または$\dfrac{df(x)}{dx}$と書くことにします。

$f(x) = ax^n$の微分

これまでの導出を新しい記法でまとめます。
まとめます。$f(x) = ax^n$のグラフは、

$n = 1$のとき、すなはち　$f(x) = ax$　のとき、$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = a$

$n = 2$のとき、すなはち　$f(x) = ax^2$のとき、$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2ax$

$n = 3$のとき、すなはち　$f(x) = ax^3$のとき、$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 3ax^2$

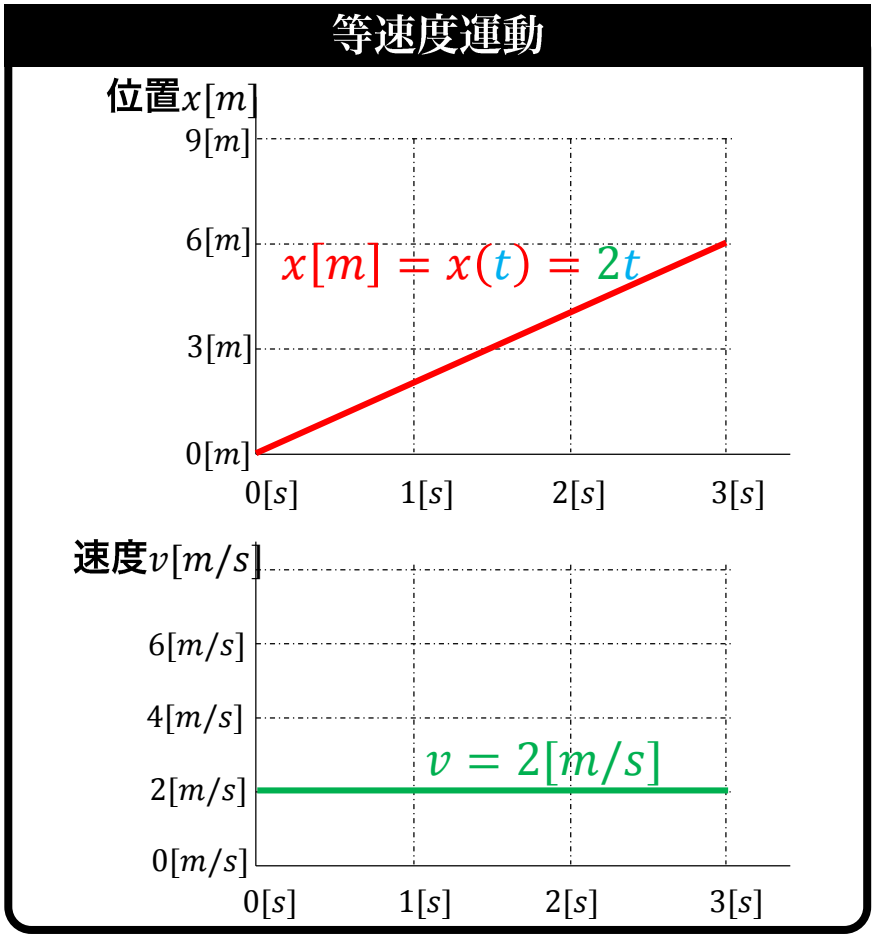
確認しよう

$n = 1$のとき、すなはち　$f(x) = ax$　のとき、$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = a$

$f(x) = ax$のグラフは、
１次函数$f(x) = ax + b$の
$b = 0$のケースなので、

その傾きは、xの値に関わらず
aにきまっている。たしかに。

$x \to t$に置き換えた、$x - t$図の場合
右上図の等速度運動のケースだから
$a = 2$で、$f(t) = at = 2t$のとき、
$f'(t) = 2$とたしかになっている。



確認しよう

$n = 2$のとき、すなはち　$f(x) = ax^2$のとき、$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2ax$

$f(x) = ax^2$のグラフは、
等加速度運動を考える時とりあつかった。
$f(t) = t^2$は、

$$f(x) = ax^2 \text{の} a = 1, x = t$$

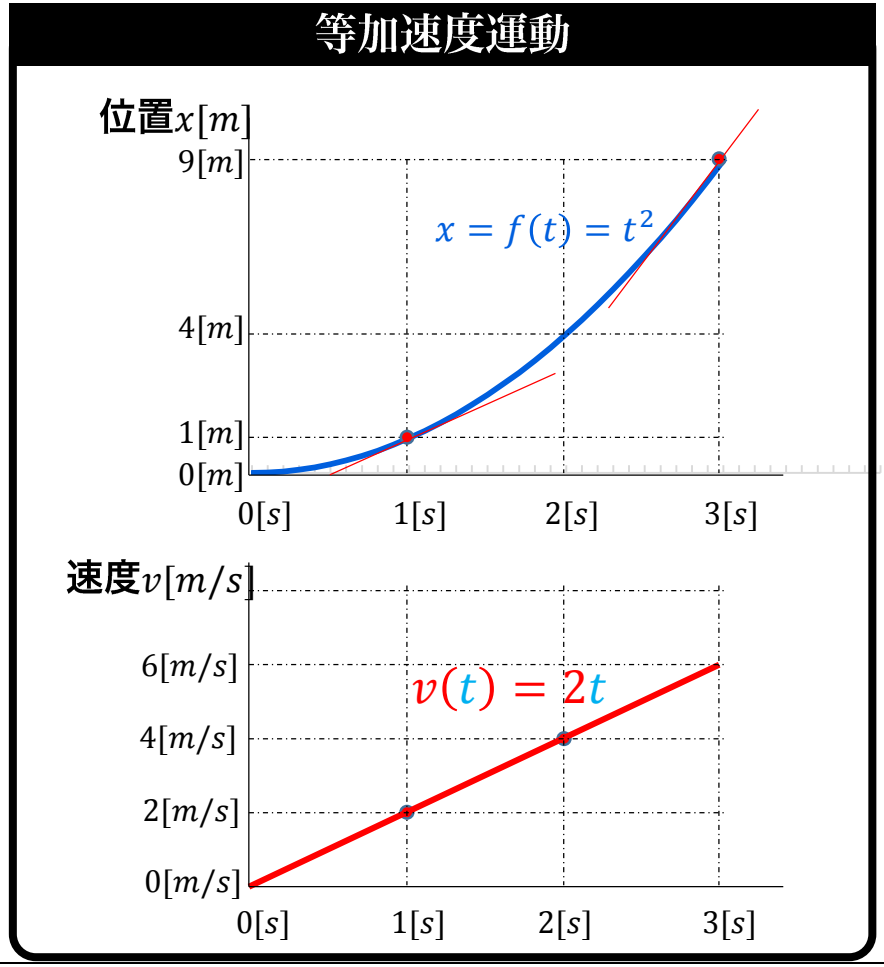
のケースだから、

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2ax$$

にそれを入れてやると、

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2t$$

より、昔やった計算と合致する。



微分公式

毎回、$x+\Delta x$とか$t+\Delta t$とか、置いて計算すると、大変です。
大変なので、先人たちが成果をまとめておいてくれました。
その成果を「公式」と言います。

函数 $f(x)$		導函数 $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$
x	$\rightarrow$	1
ax	$\rightarrow$	a
ax^2	$\rightarrow$	$2ax$
ax^3	$\rightarrow$	$3ax^2$
ax^n	$\rightarrow$	anx^{n-1}

←これは「Σ」「二項定理」を学ぶと自分で計算で確認できるようになる

微分公式（物理学風）

まったく同じことを、物理学風に時間tの函数と考えると
このように書くことができます。

函数 $f(t)$		導函数 $f'(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$
t	$\rightarrow$	1
at	$\rightarrow$	a
at^2	$\rightarrow$	$2at$
at^3	$\rightarrow$	$3at^2$
at^n	$\rightarrow$	ant^{n-1}

単に、$\dfrac{df}{dt}$ と書くことや
(ライプニッツの記法)

時間微分を $\dot{x}$
(ニュートンの記法)

のように上にドットを
つけて書くこともあります。

コラム：ニュートンとライプニッツ

微積分学の創始者は二人居ます。
(実際にはNewtonの方が先だと私は考えていますが)
ニュートンとライプニッツが、ほぼ同時期に創始しました。

だから、今でもその名残で複数の記法が残っています。

ニュートンの記法よりも、
弟子をきちんと育てたライプニッツの記法が。

それに加え、解析力学の創始者ラグランジュの記法が、
現代数学では一般的です。

コラム：ニュートン、ライプニッツ、ラグランジュ

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716) ドイツ

1回微分: $\frac{dy}{dx}$　二回微分: $\frac{d^2y}{dx^2}$

初期の形式言語の考案者でもある。このdは、Δを無限小にしたという意味。
(形式言語：プログラミング言語とか)

Sir Isaac Newton
(1642-1727) イギリス

1回微分: $\dot{x}$　二回微分: $\ddot{x}$
※時間tでの微分の時のみ用いる。

古典力学の創始者。ケプラー、ガリレオ、デカルト、ホイヘンスの洞察をもとに、力学**原理**として「運動の3法則」をまとめた。晩年は錬金術に没頭した。

Joseph-Louis Lagrange
(1736 – 1813) フランス

1回微分: $f'(x)$ 二回微分: $f''(x)$

オイラー(指導教員)と並ぶ18世紀最大の数学者。解析力学の創始者。マリー・アントワネットの数学教師でもあった。

上から下へ微分、下から上へ積分